UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CONTINUOS ENCADENABLES COMO LÍMITES INVERSOS SOBRE $[0,1]$"

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

DAVID GONZÁLEZ MARTÍNEZ

ASESOR DE TESIS:

Dr. Enrique Castañeda Alvarado

El Cerrillo, Piedras Blancas, México
Junio del 2022

Índice general

Resumen

En esta tesis nos enfocamos en dar una introducción a los límites inversos con funciones continuas definidas en $[0,1]$ y obtener una caracterización de los continuos encadenables como límites inversos sobre $[0,1]$. Es decir, veremos que si $\boldsymbol{f}$ es una sucesión de funciones continuas definidas en $[0,1]$, entonces el límite inverso de $\boldsymbol{f}$ es un continuo encadenable, inversamente, veremos que para cada continuo encadenable M existe una sucesión $\boldsymbol{f}$ de funciones continuas definidas en $[0,1]$, lineales por partes que no son constantes en ningún subintervalo de $[0,1]$ tal que el el límite inverso de $\boldsymbol{f}$ es homeomorfo a M.

Introducción

Este trabajo está enmarcado en la teoría de continuos, en específico en el área de los límites inversos.

El límite inverso de la sucesión $\boldsymbol{f} = f_1, f_2, \ldots$ de funciones continuas definidas en $[0,1]$ es un subespacio del espacio $\mathbf{Q} = \prod_{i=1}^{\infty}[0,1]$, el cual esta dotado con la topología producto y consta del conjunto de puntos $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbf{Q}$ tales que $x_i = f_i(x_{i+1})$, para cada entero positivo i. Una de las cuestiones de interés es saber cuando el límite inverso de la sucesión $\boldsymbol{f}$ es un continuo, resulta que esto es consecuencia de la continuidad de la funciones involucradas en $\boldsymbol{f}$ y del hecho de que el espacio $[0,1]$ es un continuo.

La utilidad de los límites inversos es su inherente capacidad de producir espacios muy complicados al hacer variar las funciones de la sucesión $\boldsymbol{f}$. Por ejemplo es posible obtener límites inversos homeomorfos a un arco, a la cerradura de la gráfica de función $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ para $x \in (0,1]$ y a el continuo comúnmente conocido como arcoíris de Knaster e incluso el pseudoarco. Estos ejemplos son una clase especial de continuos, aquellos que llamamos continuos encadenables, de hecho el límite inverso de una sucesión $\boldsymbol{f}$ de funciones continuas definidas en $[0,1]$ es un continuo encadenable.

Tomando como base el libro de W. T. Ingram y W. S. Mahavier [1], en esta tesis veremos que para todo continuo encadenable existe una sucesión de funciones continuas, lineales por partes y sobreyectivas, cuyo límite inverso es homeomorfo a dicho continuo.

La estructura del presente trabajo se conforma de tres capítulos:

En el primer Capítulo nos enfocamos en proporcionar los fundamentos necesarios para la comprensión de los límites inversos con funciones continuas definidas en $[0,1]$.

En el segundo Capítulo, para introducirnos en el estudio de los límites inversos desarrollamos una serie de ejemplos. Posteriormente analizamos casos más generales que surgen a partir de estos ejemplos y para visualizar el alcance de los límites inversos, concluimos el segundo capítulo identificando al continuo obtenido de un límite inverso con una única función de ligadura.

Finalmente, en el tercer Capítulo nos centramos en probar una caracterización de los continuos encadenables, específicamente, probaremos que para todo continuo encadenable existe una sucesión de funciones continuas lineales por partes, tal que el límite inverso de $\boldsymbol{f}$ es homeomorfo a dicho continuo encadenable.

Capítulo 1

Preliminares

En esta capítulo introducimos conceptos básicos de topología, así como los teoremas más usados en el presente trabajo.

1.1. Espacios Topológicos.

Definición 1.1 *Sea X un conjunto distinto del vacío. Una topología sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X que cumple lo siguiente*

i) $\emptyset, X \in \tau$.

ii) La intersección de cualquier subcolección finita de elementos de τ está en τ.

iii) La unión de cualquier subcolección de los elementos de τ está en τ.

Si al conjunto X se le ha definido una topología τ, a la pareja (X, τ) se le llama espacio topológico. Por simplicidad y a menos de que no haya confusión sobre τ, diremos que X es un espacio topológico. A los elementos de τ les llamamos conjuntos abiertos de X.

Definición 1.2 *Sean τ y τ' dos topologías sobre un conjunto no vacío X. Si $\tau \subset \tau'$ diremos que τ' es más fina que τ, también diremos que τ es más gruesa que τ'.*

Definición 1.3 *Sea X un espacio topológico, un subconjunto U de X es cerrado si y sólo si $X \setminus U$ es abierto en X.*

Con frecuencia utilizaremos los siguiente.

Teorema 1.1 *Si X un espacio topológico, entonces:*

i) *$\emptyset$, X son conjuntos cerrados.*

ii) *La unión finita de conjuntos cerrados es un cerrado.*

iii) *Intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

A lo largo del presente trabajo consideraremos las siguientes topologías

Ejemplo **1.1** *Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales, la colección $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, A \text{ es unión de intervalos abiertos }\}$ es una topología sobre $\mathbb{R}$.*

Ejemplo **1.2** *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$, la colección*

$$\tau_A = \{A \cap U \,|\, U \text{ es un abierto en} X\}.$$

es una topología sobre A, denominada la topología del subespacio.

Con esta topología, diremos que A es un subespacio de X.

En ocasiones es bastante difícil describir una topología τ sobre X, por lo que a partir de una colección de subconjuntos de X podemos describir a la topología sobre X.

Definición 1.4 *Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B}$ de abiertos de X es una base para la topología sobre X si cualquier conjunto abierto de X es unión de elementos de $\mathcal{B}$.*

A los elementos de $\mathcal{B}$ les llamamos elementos básicos.

Proposición 1.1 *La colección $\mathcal{B}$ es una base del espacio topológico X si y solo si para todo U abierto y $x \in U$ existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$.*

Demostración.
Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base. Sean U un abierto de X y $x \in U$, para U existe una subcolección $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ tal que $U = \bigcup_{V \in \mathcal{B}'} V$, por lo que existe $W \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in W$ y $W \subseteq U$.

Ahora supongamos que para cada U abierto y para cada $x \in U$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Notemos que $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, lo cual implica que cada abierto de X es unión de elementos de $\mathcal{B}$. $\square$

Teorema 1.2 *Sea X un espacio topológico. Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología de X, entonces* *i) Para toda $x \in X$ existe un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.*

ii) Para cualesquiera $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y para toda $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Demostración.

i) Como $\mathcal{B}$ es una base y X es un abierto, existe una subcolección $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ tal que $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}'} U$. Así, para $x \in X$ existe $V \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in V$.

ii) Sean B_1 y B_2 elementos de $\mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, al ser $B_1 \cap B_2$ abierto por la Proposición 1.1, para $x \in B_1 \cap B_2$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. □

Teorema 1.3 *Sean X un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ una colección de subconjuntos de X que satisface las propiedades del i) y ii) del Teorema 1.2. Entonces, existe una única topología en X para la cual $\mathcal{B}$ es base.*

Demostración.
Definamos a la topología τ generada por $\mathcal{B}$ como: $U \subseteq X$ es un abierto de X si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq U$. Demostraremos que τ es una topología en X.

Por vacuidad $\emptyset \in \tau$ y para cada $x \in X$ por *i*) existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq X$, por lo que $X \in \tau$.
Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de conjuntos abiertos en τ, si $x \in U = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, entonces existe $\beta \in J$ tal que $x \in U_\beta$ y U_β es un abierto, por lo que existe un elemento básico B tal que $x \in B \subseteq U_\beta \subseteq U$, así U esta en τ.
Finalmente sean $U_1, U_2, \ldots, U_n$ elementos en τ, y $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, por *ii*) existe $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_1$ y $B_1 \subseteq U_1 \cap U_2$, nuevamente por *ii*), para B_1 y U_3 existe $B_2 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_2$ y $B_2 \subseteq U_3 \cap B_1$, continuando de esta manera obtenemos $B_{n-1} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_{n-1}$ y $B_{n-1} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i$.

Para finalizar, supongamos que existe otra topología τ' de X para la cual $\mathcal{B}$ es base. Sea $U \in \tau'$, por la Proposición 1.1 para cada $x \in U$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$, por lo que $U \in \tau$. Similarmente por la Proposición 1.1 se tiene que $\tau \subseteq \tau'$. □

La siguiente definición nos proporciona una manera de obtener una base a partir de intersecciones finitas.

Definición 1.5 *Sea X un espacio topológico, una subbase $\mathcal{B}$ del espacio X es una colección de subconjuntos abiertos de X cuya unión es X y las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$ forman una base para la topología sobre X.*

1.1.1. La topología producto.

Definición 1.6 *Sean J un conjunto de índices y X un conjunto. Definimos la j-upla de elementos de X como la función $\boldsymbol{x} : J \to X$. Si $\alpha \in J$ denotaremos el valor de $\boldsymbol{x}$ en α como x_α en lugar de $x(\alpha)$, la cual llamaremos la α-ésima coordenada de $\boldsymbol{x}$ y denotaremos a la función $\boldsymbol{x}$ mediante el símbolo*

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J}.$$

Denotaremos al conjunto de todas las j-uplas de elementos de X por X^J.

Definición 1.7 *Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia indexada de conjuntos indexada por J y $X = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$. El producto cartesiano de la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es denotado por*

$$\textstyle\prod_{\alpha \in J} A_\alpha,$$

la cual se define como el conjunto de todas las j-uplas $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ de los elementos de X tales que $x_\alpha \in A_\alpha$ para cada $\alpha \in J$.

En caso de que no exista confusión sobre el conjunto de índices, simplemente escribiremos (x_α) para denotar a la función $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$.

Definición 1.8 *Sea*

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$$

la función que asigna a cada elemento del espacio producto su coordenada β-ésima, es decir,

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta.$$

π_β es llamada función proyección asociada al índice β.

Definición 1.9 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de espacios topológicos. Denotemos por $\mathcal{S}_\beta$ a la colección*

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \,|\, U_\beta \text{ es abierto en } X_\beta\}.$$

Sea $\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta$, la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ se denomina topología producto. Con esta topología $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ se denomina espacio producto.

Los elementos de la base en la topología producto son de la siguiente forma.

Teorema 1.4 *Supongamos que la topología sobre cada espacio X_α está dada por una base $\mathcal{B}_\alpha$. La colección de todos los conjuntos de la forma*

$$\prod_{\alpha \in J} B_\alpha,$$

donde $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ para un conjunto finito de índices α y $B_\alpha = X_\alpha$ para los índices restantes es una base para la topología producto.

1.1.2. La topología generada por una métrica.

Definición 1.10 *Sea X un conjunto distinto de vacío. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se dice que es una métrica o una función distancia sobre X si d satisface las siguientes propiedades:*

i) $d(x,y) \geq 0$ *y* $d(x,y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$.

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ *para todo* $x, y \in X$.

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *para toda* $x, y, z \in X$.

A la pareja (X,d) se le llama espacio métrico y al número $d(x,y)$ le llamamos distancia entre x y y.

Ejemplo **1.3** *Para $x, y \in \mathbb{R}$ la función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = |x - y|$ es una métrica sobre $\mathbb{R}$.*

Dados un espacio métrico (X,d) y $\varepsilon > 0$, al conjunto

$$B_d(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

lo llamamos bola de radio ε centrada en x. Cuando no exista confusión acerca de la métrica d, escribiremos simplemente $B(x,\varepsilon)$.

Definición 1.11 *Sean (X,d) un espacio métrico y $\varepsilon > 0$. La colección de las bolas centradas en x para cada $x \in X$, es una base para una topología sobre X a la que llamamos topología métrica inducida por d.*

Observación 1.1 *Por la Proposición 1.1 tenemos que un conjunto U es abierto en la topología métrica inducida por d, si y sólo si, para cada $y \in U$ existe $\delta > 0$ tal que $B_d(y,\delta) \subseteq U$.*

Teorema 1.5 *Sea (X,d) un espacio métrico, definamos $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ como*

$$d'(x,y) = min\{d(x,y),1\}$$

Entonces d' es una métrica que induce la misma topología que d.

A la métrica d' le llamaremos métrica acotada correspondiente a d. Así para un espacio métrico con distancia d podemos suponer que d es una métrica acotada (acotada por 1).

Ejemplo **1.4** *Sean $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una familia de espacios métricos y ρ_i la métrica acotada del espacio X_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Para $X = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ y $\boldsymbol{x} = (x_i)$, $\boldsymbol{y} = (y_i)$ puntos en X sea*

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i(x_i,y_i)}{2^i}.$$

Entonces ρ es una métrica sobre X.

Un hecho que frecuentemente usaremos más adelante es que la topología sobre X definida en el Ejemplo 1.4 coincide con la topología producto de X. Lo cual se demuestra en el Teorema 1.8.

1.2. Conceptos básicos.

Dado un subconjunto A de un espacio topológico X es de suma importancia “clasificar” los elementos de X con respecto a los de A, el concepto de interior, conjunto derivado y frontera clasifican elementos de X.

Definición 1.12 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un punto $x \in A$ es un punto interior de A si existe un abierto U tal que $x \in U$ y $U \subseteq A$.*

Al conjunto de todos los puntos interiores de A le llamamos interior de A y lo denotamos por $\mathrm{Int}(A)$.

Definición 1.13 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que x es un punto de la cerradura de A si para todo abierto U de X tal que $x \in U$, se cumple que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Al conjunto de puntos de la cerradura de A le llamaremos simplemente cerradura de A y lo denotaremos por $\mathrm{Cl}(A)$. De las equivalencias que más usaremos en este trabajo esta la siguiente.

Proposición 1.2 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$, A es cerrado si y solo si $\mathrm{Cl}(A) = A$.*

Definición 1.14 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que x es un punto límite de A si para todo abierto U de X tal que $x \in U$, $(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.*

Al conjunto de todos los puntos límite de A lo llamaremos el conjunto derivado de A y lo denotaremos por A', decimos que un punto $x \in A$ es aislado si existe un abierto de X tal que $U \cap A = \{x\}$. Notemos que $\mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$.

Definición 1.15 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. El conjunto $\mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)$ es llamado frontera de A y lo denotamos por $\mathrm{Fr}(A)$.*

Definición 1.16 *Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Diremos que A es denso en X si $\mathrm{Cl}(A) = X$.*

1.3. Axiomas de separación.

Definición 1.17 *Un espacio topológico X es T_0 si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ distintos existe un abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$.*

Definición 1.18 *Un espacio topológico X es T_1 si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ distintos existen abiertos A_1 y A_2 tales que $x \in A_1 \setminus A_2$ y $y \in A_2 \setminus A_1$.*

Definición 1.19 *Un espacio topológico X es T_2 o de Hausdorff si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ distintos existen abiertos ajenos A_1 y A_2 tales que $x \in A_1$ y $y \in A_2$.*

1.4. Funciones continuas.

Definición 1.20 *Sean X, Y espacios topológicos, $f : X \to Y$ una función y $x \in X$, decimos que f es continua en x si y sólo si para U un abierto en Y tal que $f(x) \in U$ existe un abierto V de X tal que $x \in V$ y $f(V) \subseteq U$.*

Si f es continua en cada punto de X decimos que f es continua en X. Equivalentemente f es continua en cada punto de X si y solo si para todo abierto U de Y el conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto. En espacios métricos tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.6 *Sean X, Y espacios métricos con distancias d_X y d_Y respectivamente y $f : X \to Y$ una función. Entonces f es continua en X si y sólo si para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta$ entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Para X, Y conjuntos, $A \subseteq X$ y $f : X \to Y$ una función, definimos la función restricción de f en A que denotamos por $f_{|A}$ como la función $f_{|A} : A \to Y$ dada por $f_{|A}(x) = f(x)$ para cada $x \in A$. Si U es un abierto en Y entonces $f_{|A}^{-1}(U) = \{x \in X \cap A \mid f(x) \in U\} = f^{-1}(U) \cap A$. Entonces se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.7 (*Reglas para construir funciones continuas*) *Sean X, Y y Z espacios topológicos entonces:*

i) Si A es un subespacio de X, entonces la función inclusión $j : A \to X$ es continua.

ii) Si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son funciones continuas, entonces la función compocisión $g \circ f$ es continua.

iii) Si $f : X \to Y$ es una función continua y A es un subespacio de X entonces la función restricción $f_{|A} : A \to Y$ es continua.

iv) Si $X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ tal que U_α es abierto y $f_{|U_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in J$, entonces f es continua.

Observación 1.2 *Por el Teorema 1.4, toda proyección $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$ para cada $\beta \in J$ es una función continua.*

Lema 1.1 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de espacios topológicos, la topología producto τ es la topología mas gruesa que hace continuas a las proyecciones $\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$.*

Demostración.
Supongamos que τ' es una topología sobre $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ tal que

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \to X_\beta$$

es continua. Para U abierto en X_β al ser π_β continua se tiene que $\pi_\beta^{-1}(U) \in \tau'$, pero $\pi_\beta^{-1}(U)$ es un abierto básico de τ, en consecuencia $\tau \subseteq \tau'$. $\square$

En los siguientes capítulos con frecuencia haremos uso del siguiente teorema.

Teorema 1.8 *Sean $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de espacios métricos y ρ_i una métrica sobre el espacio X_i acotada por 1. La topología inducida sobre el conjunto $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ por la métrica ρ definida en el Ejemplo 1.4 coincide con la topología producto de X.*

Demostración.
Denotemos por τ_ρ a la topología inducida por la métrica ρ en X y por τ a la topología producto de X. Para probar que $\tau \subseteq \tau_\rho$ por el Lema 1.1 solo basta ver que cada función proyección definida en X con la topología métrica es continua. Veamos que la función π_j es continua para toda $j \in \mathbb{N}$. Sea $(x_i) \in X$, para $\varepsilon > 0$ si $(y_i) \in X$ y $\rho((x_i),(y_i)) < \frac{\varepsilon}{2^j}$ entonces

$$\frac{\rho_j(x_i, y_i)}{2^i} < \rho((x_i),(y_i)) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Así π_j es continua en (x_i) y en consecuencia π_j es continua en X.

Ahora probaremos que $\tau_\rho \subseteq \tau$. Sea $U \in \tau_\rho$ y $\boldsymbol{x} = (x_i) \in U$ por lo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\rho(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subseteq U$. Sea k un entero tal que

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{1}{2^i} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para $i = 1, 2, \ldots, k$, sean $U_i = B_{\rho_i}(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$, por lo que si $\boldsymbol{y} = (y_i) \in \bigcap_{i=1}^k \pi_i^{-1}(U_i)$ se tiene $\rho_i(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, en consecuencia

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2^i} + \sum_{i > k+1} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así, para cada punto $\boldsymbol{x} \in U$ existe un abierto básico en τ tal que

$$\boldsymbol{x} \in \bigcap_{i=1}^{k} \pi_i^{-1}(U_i) \subseteq B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subseteq U$$

Por lo tanto $U \in \tau$. □

1.5. Continuos

En esta sección daremos algunos resultados básicos sobre continuos.

1.5.1. Compacidad

Definición 1.21 *Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio topológico X se dice que cubre a X o que es un cubrimiento de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ es igual a X. Decimos que $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.*

Definición 1.22 *Sea X un espacio topológico, decimos que X es compacto si de cada cubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X existe una subcolección finita que cubre a X.*

Para el caso cuando Y es un subespacio de X diremos que una colección $\mathcal{A}$ cubre a Y (o que es un cubrimiento de Y) si la unión de todos los elementos de $\mathcal{A}$ contiene a Y. Entonces un subespacio Y de un espacio X es compacto si y sólo si, cada cubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre a Y.

Ejemplo **1.5** *El intervalo* $[0, 1]$ *es un conjunto compacto.*

Demostración.
Sea $\mathcal{U} = \{U_\gamma\}_{\gamma \in J}$ un cubrimiento abierto de $[0, 1]$. Consideremos al conjunto:

$$C = \{x \in [0, 1] \mid \text{ existe una subcubierta finita de } U \text{ para } [0, x]\}$$

Observemos que $C \neq \emptyset$ pues $0 \in C$, así que C es un conjunto acotado no vacío por lo que el supremo existe, sea s el supremo de C.
Supongamos que $s \neq 1$, por lo cual $s \in [0, 1)$. Al ser $\mathcal{U}$ cubierta, existe $\alpha \in J$ tal que $s \in U_\alpha$. Al ser abierto U_α existe $\varepsilon > 0$ tal que el intervalo $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subseteq U_\alpha$. Sea $x \in (s - \varepsilon, s) \cap C$, entonces existen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ en J tales que la subcolección $\{U_{\beta_1}, U_{\beta_2}, \ldots, U_{\beta_n}\}$ cubre al intervalo $[0, x]$. Sea $y \in (s, s+\varepsilon)$, la subcolección de $\mathcal{U}$, $\{U_{\beta_1}, U_{\beta_2}, \ldots, U_{\beta_n}\} \cup \{U_\alpha\}$ cubre al intervalo $[0, x] \cup [x, y]$, por lo que $y \in C$ y así $y > s$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $1 = s$.

Falta probar que $1 \in C$. Al ser $\mathcal{U}$ cubrimiento abierto de $[0, 1]$ existe $\beta \in J$ tal que $1 \in U_\beta$, sea $\varepsilon > 0$ tal que $(1 - \varepsilon, 1] \subseteq U_\beta$, elijamos $x \in (1 - \varepsilon, 1] \cap C$, así existe una subcubierta finita $\mathcal{U}'$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U}'$ cubre a $[0, x]$. Por lo cual $\mathcal{U}' \cup \{U_\beta\}$ cubre al intervalo $[0, x] \cup [x, 1]$ y por ello $1 \in C$. □

Teorema 1.9 *Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración.
Sea A un subespacio cerrado de un espacio compacto X y $\{U_\gamma\}_{\gamma \in J}$ un cubrimiento abierto de A, la colección $\mathcal{A} = \{U_\gamma\}_{\gamma \in J} \cup \{X \setminus A\}$ es un cubrimiento abierto de X, el cual es compacto, por lo que existe una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre a X y en consecuencia esta subcolección cubre a A. □

Teorema 1.10 *Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Demostración.
Sean X un espacio de Hausdorff, $A \subseteq X$ un espacio compacto y $x \in X \backslash A$. Para cada $y \in A$ existen abiertos ajenos U_y y V_y de X tales que $x \in V_y$, $y \in U_y$. La colección de abiertos $\mathcal{C} = \{U_y \,|\, y \in A\}$ cubre al conjunto A el cual es compacto, por lo que existen $y_1, y_2, \dots, y_n$ tales que la únion de los conjuntos U_{y_i} para $1 \leq i \leq n$ cubren al conjunto A. Sea $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$, el cual es un conjunto abierto y no intersecta a A pues $V \subseteq V_{y_i}$. Por lo que $x \in V$ y $V \cap A = \emptyset$, por tanto A es cerrado. $\square$

La compacidad se preserva bajo funciones continuas.

Teorema 1.11 *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua, si $A \subseteq X$ es un espacio compacto, entonces $f(A)$ es compacto.*

Demostración.
Supongamos que A es un espacio compacto de X, sea $\mathcal{C}$ un cubrimiento de $f(A)$ por abiertos de Y, notemos que si $C \in \mathcal{C}$ entonces $f^{-1}(C)$ es un abierto en X y ya que $f(A) \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, entonces la colección $\mathcal{D} = \{f^{-1}(C) \,|\, C \in \mathcal{C}\}$ cubre a A. Por lo que existe una subcolección finita $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D}'$ cubre a A, así existe una subcolección finita $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ tal que si $C \in \mathcal{C}'$ entonces $f^{-1}(C) \in \mathcal{D}'$, lo que implica que $\mathcal{C}'$ es una subcolección finita de $\mathcal{C}$ que cubre a $f(A)$, por tanto $f(A)$ es compacto. $\square$

La siguiente definición es bastante importante en el sentido en que proporciona una caracterización de espacios compactos.

Definición 1.23 *Una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X se dice que tiene la propiedad de la intersección finita si cada subcolección finita*

$$\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$$

de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía, es decir $\bigcap_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$.

Teorema 1.12 *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, se tiene que*

$$\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

Demostración.
Dada una colección de conjuntos $\mathcal{A}$ sea

$$\mathcal{C} = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Las siguientes afirmaciones son ciertas:

i) $\mathcal{A}$ es una colección de abiertos si y sólo si $\mathcal{C}$ es una colección de cerrados.

ii) La colección $\mathcal{A}$ no cubre a X si y sólo si $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es no vacía.

iii) La subcolección finita $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de $\mathcal{A}$ cubre a X si y sólo si la intersección de los elementos $C_i = X \setminus A_i$ de $\mathcal{C}$ es vacía.

La condición *i*) es inmediata y las condiciones *ii*) y *iii*) se deducen de:

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in J}(X \setminus A_\alpha).$$

Si X es compacto entonces para toda colección $\mathcal{A}$ de abiertos en X tal que $\mathcal{A}$ cubre a X existe una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre a X, su contrarrecíproco es: si toda subcolección finita de $\mathcal{A}$ no cubre a X entonces la colección $\mathcal{A}$ no cubre a X.
Al ser $\mathcal{A}$ una colección arbitraria de abiertos por *i*), $\mathcal{C}$ es una colección de cerrados en X. Ya que toda subcolección finita de A no cubre a X entonces por el contrarecíproco de *iii*), $\mathcal{C}$ satisface la propiedad de la intersección finita y como $\mathcal{A}$ no cubre a X por *ii*), $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es no vacía. Por lo tanto se tiene que para cada colección $\mathcal{C}$ de conjuntos cerrados en X con la propiedad de intersección finita cumple que $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es no vacía.

Supongamos que $\mathcal{C}$ satisface la propiedad de la intersección finita, entonces para toda subcolección finita de $\mathcal{C}$ digamos $\{C_1 = X \setminus A_1, C_2 = X \setminus A_2, \ldots, C_n = X \setminus A_n\}$ la intersección de los elementos de la subcolección es no vacía. Por *iii*) la subcolección $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ no cubre a X y ya que la intersección de todos los elementos de la colección $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ es no vacía por *ii*), la colección $\mathcal{A}$ no cubre a X. Por lo tanto tenemos que si toda subcolección finita de $\mathcal{A}$ no cubre a X entonces la colección $\mathcal{A}$ no cubre a X. De donde se concluye que X es compacto. $\square$

El siguiente teorema es bastante importante en la topología general [4, Teorema 37.3, pág. 267].

Teorema 1.13 *(Teorema de Tychonoff) El producto arbitrario de espacios compactos con la topología producto es compacto.*

1.5.2. Conexidad.

Definición 1.24 *Sea X un espacio topológico, una separación de X es un par de conjuntos abiertos U, V ajenos, no vacíos en X tales que $X = A \cup B$. Decimos que un espacio topológico es conexo si no existe ninguna separación de X.*

Diremos que un espacio topológico es disconexo si no es conexo. Equivalentemente un espacio topológico X es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y X. Un subconjunto Y de un espacio topológico X se llama conexo, si el espacio Y con la topología del subespacio de X es conexo.

Observación 1.3 *Si Y es un subespacio de un espacio topológico X y existen conjuntos A, B tales que $Y = A \cup B$, $Cl(A) \cap B = \emptyset$ y $A \cap Cl(B) = \emptyset$, entonces $Cl(A) \cap Y = A$ y $Cl(B) \cap Y = B$. Así los conjuntos A y B son cerrados en Y y en consecuencia Y no es conexo.*

Ejemplo **1.6** *El intervalo* $[0, 1]$ *es conexo.*

Lema 1.2 *Si los conjuntos C y D forman una separación de un espacio X y Y es un subespacio conexo de X, entonces $Y \subseteq C$ o $Y \subseteq D$.*

Demostración.
Supongamos que $Y \cap C \neq \emptyset$ y $Y \cap D \neq \emptyset$, ya que los conjuntos C y D forman una separación de X tenemos que $(C \cap Y) \cap (D \cap Y) = \emptyset$ donde $(C \cap Y), (D \cap Y)$ son abiertos en Y y así los conjuntos $(C \cap Y), (D \cap Y)$ forman una separación de Y, lo cual es una contradicción. $\square$

Como consecuencia inmediata del Lema 1.2 se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 1.14 *La unión de subespacios conexos que tienen un punto en común es conexo.*

Demostración.
Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de espacios conexos que tienen un punto x en común. Supongamos que $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ no es conexo, por lo cual existen abiertos C, D ajenos tales que $\mathcal{A} = C \cup D$, sin perdida de generalidad supongamos que $x \in C$. Ya que $x \in A_\alpha$, del Lema 1.2 se tiene que $A_\alpha \subseteq C$ para cada $\alpha \in J$ y en consecuencia $\mathcal{A} \subseteq C$, lo cual implica que $D = \emptyset$, pero esto no es posible. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es conexo. $\square$

La conexidad se preserva bajo funciones continuas.

Teorema 1.15 *Si $f : X \to Y$ es una función continua y X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración.
Supongamos que $f(X)$ no es conexo, por lo que existen abiertos ajenos H, K no vacíos tales que $H \cup K = f(X)$. Al ser f continua $f^{-1}(H)$ y $f^{-1}(K)$ son abiertos en X tales que $X = f^{-1}(H) \cup f^{-1}(K)$, como X es conexo existe $x \in f^{-1}(H) \cap f^{-1}(K)$ así que $f(x) \in H \cap K$, lo cual no es posible. Por lo tanto $f(X)$ es conexo. $\square$

Teorema 1.16 *Si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$ conexo, entonces para cualquier subconjunto B tal que:*

$$A \subseteq B \subseteq \mathrm{Cl}(A)$$

Entonces B es conexo.

En particular si A es conexo el conjunto $\mathrm{Cl}(A)$ es conexo.

Teorema 1.17 *Si X y Y son espacios topológicos conexos, entonces $X \times Y$ es conexo.*

Demostración.
Sea $(a, b) \in X \times Y$, notemos que la función $f : X \to X \times Y$ definida por $f(x) = (x, b)$ para todo $x \in X$ es continua y $f(X) = X \times \{b\}$, por lo que el conjunto $X \times \{b\}$ es conexo. De forma similar para cada $x \in X$ se tiene que el conjunto $\{x\} \times Y$ es conexo.
Para cada $x \in X$, $(X \times \{b\}) \cap (\{x\} \times Y) = \{(x, b)\}$. Así que por el Teorema 1.14 el conjunto $C_x = (X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)$ es conexo. Ademas $(a, b) \in C_x$, por lo que $(a, b) \in \bigcap_{y \in X} C_y$ y por el Teorema 1.14 el conjunto $\bigcup_{y \in X} C_y = X \times Y$ es conexo. $\square$

Inductivamente y aplicando el Teorema 1.17 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.18 *Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una familia finita de espacios conexos, entonces el $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es conexo.*

Teorema 1.19 *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una familia de espacios conexos y X el espacio producto*

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha,$$

entonces X es conexo.

Demostración.
Sean $\boldsymbol{a} = (a_\alpha)_{\alpha\in J}$ un elemento de X, K un subconjunto finito de J y

$$X_K = \{(x_\alpha)_{\alpha\in J} \in X \,|\, x_\alpha = a_\alpha \text{ si } \alpha \notin K\}.$$

Notemos que $X_K = (\prod_{\alpha\in K} X_i) \times (\prod_{\alpha\in J\setminus K}\{a_\alpha\})$, por el Teorema 1.18 el conjunto $\prod_{\alpha\in K} X_\alpha$ es conexo y como $\prod_{\alpha\in K} X_i$ es homeomorfo a X_K se tiene que X_K es conexo.
Sea $\mathcal{K}$ la colección de todos los subconjuntos finitos de J, si $K \in \mathcal{K}$, entonces $\boldsymbol{a} \in X_K$, por lo que $\boldsymbol{a} \in \bigcap_{K\in\mathcal{K}} X_K$ y así por el Teorema 1.14 el conjunto $Y = \bigcup_{K\in\mathcal{K}} X_K$ es conexo.

Probaremos que $\mathrm{Cl}(Y) = X$. Supongamos que $\mathrm{Cl}(Y) \neq X$, por lo cual $\mathrm{Cl}(Y) \subset X$. Al ser $\mathrm{Cl}(Y)$ un cerrado, el conjunto $X \setminus \mathrm{Cl}(Y)$ es abierto, por lo que existe un abierto básico W tal que $W \subseteq X \setminus \mathrm{Cl}(Y)$, así pues existe β y un abierto U de X_β tal que $\pi_\beta^{-1}(U) \cap X_{\{\beta\}} \neq \emptyset$, en consecuencia$W \cap Y \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por tanto $\mathrm{Cl}(Y) = X$.

Al ser Y conexo, el conjunto $\mathrm{Cl}(Y)$ es conexo y así X es conexo. □

1.5.3. Espacios irreducibles.

Definición 1.25 *Decimos que un espacio topológico es irreducible entre los puntos a y b siempre que X sea conexo y esos dos puntos no puedan estar contenidos por un subespacio conexo cerrado diferente de X.*

Ejemplo **1.7** *El conjunto*

$$A = \{(x, y) \,|\, 0 < x \leq 1 \text{ y } y = \mathrm{sen}(\tfrac{1}{x})\} \cup \{(x, y) \,|\, x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$$

Es irreducible entre los puntos $(0, 1)$ *y* $(1, \mathrm{sen}(1))$.

Demostración.
Primero veamos que el conjunto A es conexo. Sea $\psi : (0, 1] \to A$, la función continua definida por $\psi(x) = (x, \mathrm{sen}(\frac{1}{x}))$, al ser $(0, 1]$ conexo, entonces $\psi((0, 1])$ es conexo. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un entero positivo n tal que

$$\frac{2}{(4n+3)\pi} < \frac{2}{(4n+1)\pi} < \varepsilon.$$

Notemos que $\mathrm{sen}([\frac{(4n+1)\pi}{2}, \frac{(4n+3)\pi}{2}]) = [-1, 1]$, por lo que para $y \in [-1, 1]$ existe $\alpha \in [\frac{2}{(4n+3)\pi}, \frac{2}{(4n+1)\pi}]$ tal que $\mathrm{sen}(\frac{1}{\alpha}) = y$, en consecuencia el punto $(\alpha, y) \in A \setminus \{(x, y) \,|\, x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$ y $(\alpha, y) \in B(\varepsilon, (0, y))$. Por lo tanto $\mathrm{Cl}(\psi((0,1])) = A$ y por el Teorema 1.16, A es conexo.

Para finalizar, notemos que si B es un conjunto conexo que contiene a los puntos $(0,1)$ y $(1, sen(1))$, entonces $\{(x,y) \,|\, 0 < x \leq 1 \text{ y } y = \mathrm{sen}(\frac{1}{x})\} \subseteq B$. Lo cual implica que $B = A$. Por lo tanto A es irreducible entre los puntos $(0,1)$ y $(1, sen(1))$. $\square$

1.5.4. Continuos

Definición 1.26 *Sea X un espacio topológico, decimos que X es un continuo si X es un espacio métrico no vacío, compacto y conexo.*

Definición 1.27 *Un subcontinuo es un continuo, el cual es un subconjunto de algún espacio topológico.*

Teorema 1.20 *Si X un continuo y $A_1, A_2, \ldots$ subcontinuos tales que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, entonces $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ es un subcontinuo de X.*

Demostración.
Al ser subconjuntos compactos de un espacio compacto de Hausdorff los conjuntos A_i son cerrados, en consecuencia $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X \setminus A_i$ es un abierto en X, pero

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X \setminus A_i = X \setminus \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i.$$

Por lo tanto A es cerrado.

Si suponemos que $A = \emptyset$, entonces $X \setminus A_1 \cup X \setminus A_2 \cup \cdots = X \setminus A = X$. Así, la colección $\{X \setminus A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento abierto de X y como X es compacto existen $n_1, n_2, \ldots, n_m$ enteros positivos tales que $\{X \setminus A_{n_1}, X \setminus A_{n_2}, \ldots X \setminus A_{n_m}\}$ cubre a X, supongamos que $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$. Ya que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ se tiene

$$X \setminus A_1 \subset X \setminus A_2 \subset \cdots$$

y por ello

$$X \setminus A_{n_1} \cup X \setminus A_{n_2} \cup \cdots \cup X \setminus A_{n_m} = X \setminus A_{n_m} = X.$$

Por lo tanto $A_{n_m} = \emptyset$, lo cual es una contradiccíon.

Por otra parte supongamos que A no es conexo, entonces A es unión de conjuntos cerrados ajenos U, V en X. Al ser X un espacio compacto de Hasdorff existen abiertos ajenos C, D tales que $U \subseteq C$ y $V \subseteq D$. Notemos que

$$X \setminus A_1 \cup X \setminus A_2 \cup \cdots = X \setminus A = X \setminus (U \cup V) \supset X \setminus (C \cup D)$$

Así, $\{X \setminus A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una cubierta abierta para $X \setminus (C \cup D)$. Al ser $X \setminus (C \cup D)$ compacto existen $n_1, n_2, \ldots, n_r$ enteros positivos tales que la colección $\{X \setminus A_{n_1}, X \setminus A_{n_2}, \cdots X \setminus A_{n_r}\}$ cubre a $X \setminus (C \cup D)$. Supongamos que $n_1 < n_2 < \cdots < n_r$. Luego $X \setminus (C \cup D) \subseteq X \setminus A_{n_r}$, por lo cual $A_{n_r} \subseteq C \cup D$. De la conexidad de A_{n_r} se tiene que $A_{n_r} \subseteq C$ o $A_{n_r} \subseteq D$, notemos que $U \subseteq A \subseteq A_{n_r}$ y $U \subseteq C$, entonces A_{n_r} intersecta a U, $V \subseteq A \subseteq A_{n_r}$ y $V \subseteq D$. En consecuencia A_{n_r} intersecta a D, lo cual nos lleva a una contradicción. Por lo tanto A es conexo. □

Definición 1.28 *Decimos que un punto x de un espacio conexo X es un punto de corte de X si $X \setminus \{x\} = U \cup V$, donde los conjuntos U y V son abiertos, disjuntos y no vacíos. Si x no es un punto de corte de X, decimos que es un punto de no corte.*

Observación 1.4 *En un espacio conexo X, un punto x es de corte si el conjunto $\{x\}$ es cerrado y el espacio $X \setminus \{x\}$ no es conexo.*

Lema 1.3 *Sea X un continuo, si x es un punto de corte y $X \setminus \{x\} = U \cup V$, donde los conjuntos U y V son abiertos, disjuntos y no vacíos, entonces los conjuntos $U \cup \{x\}$ y $V \cup \{x\}$ son continuos.*

Demostración.
Si suponemos que el conjunto $U \cup \{x\}$ no es conexo, entonces existen abiertos H, K ajenos no vacíos en $U \cup \{x\}$ tales que $U \cup \{x\} = H \cup K$. Sin perdida de generalidad supongamos que $x \in K$ lo cual implica que $H \subseteq U$ y así H es abierto en X, además

$$X = (H \cup K) \cup V = (K \cup V) \cup H.$$

Ya que $H \cap K = \emptyset$ y $H \cap V = \emptyset$ tenemos que $\mathrm{Cl}(K \cup V) \cap H = \emptyset$. Como V es un abierto en X tal que $V \cap H = \emptyset$ y existe un abierto W en X tal que $W \cap U = K$ entonces $W \cap H = \emptyset$ y por ello $\mathrm{Cl}(H) \cap (K \cup V) = \emptyset$. Así $\mathrm{Cl}(K \cup V) \cap H = \emptyset$ y $\mathrm{Cl}(H) \cap (K \cup V) = \emptyset$, esto implica que X no es conexo, lo cual es una contradicción. Por tanto $U \cup \{x\}$ es conexo.

Análogamente se tiene que $V \cup \{x\}$ es conexo. □

Teorema 1.21 *Todo conjunto métrico y compacto contiene un denso numerable.*

Demostración.
Sean X un espacio métrico y para cada entero positivo n

$$\mathcal{C}_n = \left\{B\left(x, \tfrac{1}{n}\right) \mid x \in X\right\}.$$

Notemos que $\mathcal{C}_n$ cubre a X y al ser X compacto existe una subcolección $C_n = \{B(x_1^n, \frac{1}{n}), B(x_2^n, \frac{1}{n}), \ldots, B(x_{k_n}^n, \frac{1}{n})\}$ de $\mathcal{C}_n$ que cubre a X. Para cada n sea $D_n = \{x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{n_k}^n\}$ y tomemos a $D = \bigcup_{n>0} D_n$, al ser D unión numerable de conjuntos finitos se tiene que D es numerable.

Dados $y \in X \setminus D$ y $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, ya que la subcubierta C_n cubre a X existe un elemento $x_i^n \in D$ tal que si $y \in B(x_i^n, \frac{1}{n})$ entonces $d(y, x_i^n) < \frac{1}{n}$, así que $B(y, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Por lo tanto D es un conjunto denso en X. $\square$

Teorema 1.22 *Si X es un continuo no degenerado, entonces X tiene al menos dos puntos de no corte.*

Demostración.
Como X es un espacio compacto y métrico entonces existe un denso numerable $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Supongamos que X no tiene más de un punto de no corte, sea x dicho punto. Entonces, los puntos que pertenecen al complemento de dicho punto son de corte, supongamos que $x \notin D$, en caso de que $x \in D$ solo basta con remover el punto del conjunto D.

Al ser x_1 un punto de corte el conjunto $X \setminus \{x_1\}$ es unión de abiertos ajenos H_1, K_1. Supongamos que $x \in K_1$. Probaremos que H_1 contiene un punto de no corte de X.
Ya que D es numerable, sea x_{n_2} el primer elemento de D en H_1, así $X \setminus \{x_{n_2}\}$ es unión de dos conjuntos ajenos H_2, K_2 tal que $x_1 \in K_2$. Por el Lema 1.3, $H_2 \cup \{x_{n_2}\}$ y $K_2 \cup \{x_{n_2}\}$ son conexos y $x_{n_2} \in H_1$, por el Lema 1.2 $H_2 \cup \{x_{n_2}\} \subseteq H_1 \cup \{x_1\}$. Ya que $x_1 \in K_2$ tenemos que $K_1 \cup \{x_1\} \subseteq K_2 \cup \{x_{n_2}\}$, observemos que

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}\} \subseteq K_2 \cup \{x_{n_2}\}.$$

Sea x_{n_3} el primer termino de D que pertenece a H_2, al ser x_{n_3} de corte $X \setminus \{x_{n_3}\} = H_3 \cup K_3$ donde $H_3 \cap K_3 = \emptyset$ con $x_{n_2} \in K_3$. Por el Lema 1.3, $H_3 \cup \{x_{n_3}\}$ y $K_3 \cup \{x_{n_3}\}$ son conexos, como $x_{n_3} \in H_2$ por el Lema 1.2 $H_3 \cup \{x_{n_3}\} \subseteq H_2 \cup \{x_{n_2}\}$ y ya que $x_{n_2} \in K_3$ se tiene que $K_2 \cup \{x_{n_2}\} \subseteq K_3 \cup \{x_{n_3}\}$, notemos que

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_3}\} \subseteq K_3 \cup \{x_{n_3}\}.$$

Continuando de esta manera obtenemos dos secuencias de conjuntos cerrados tales que

$$H_1 \cup \{x_1\} \supseteq H_2 \cup \{x_{n_2}\} \supseteq H_3 \cup \{x_{n_3}\} \supseteq \cdots$$

y

$$K_1 \cup \{x_1\} \subseteq K_2 \cup \{x_{n_2}\} \subseteq K_3 \cup \{x_{n_3}\} \subseteq \cdots .$$

La secuencia $H_1 \cup \{x_1\}, H_2 \cup \{x_{n_2}\}, H_3 \cup \{x_{n_3}\}, \ldots$, satisface las condiciones del Teorema 1.20, por ello $\bigcap_{i\geq 2}(H_i \cup \{x_{n_i}\}) \neq \emptyset$. Sea p un punto en dicha intersección. Ya que p es un punto de corte $X \setminus \{p\}$ es unión de de dos abiertos ajenos A, B con $x_1 \in B$, por el Lema 1.2 el conjunto conexo $K_1 \cup \{x_1\} \subseteq B$ y nuevamente usando el Lema 1.2 tenemos que $K_i \cup \{x_{n_i}\} \subseteq B$ para cada $i \geq 2$, por ello $D \subseteq B$. Así, existen abiertos A, B tales que $p \in A$ y $D \subseteq B$ lo cual es una contradicción, pues D es denso. En conclusión p es un punto de no corte que pertenece a H_1.

Por lo tanto X contiene al menos dos puntos de no corte. □

1.5.5. Continuos indescomponibles

Definición 1.29 *Decimos que un espacio topológico X es descomponible si $X = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos propios de X. Diremos que X es indescomponible si X no es descomponible.*

Ejemplo **1.8** (*Arcoíris de Knaster*) *Sea $\mathcal{C}_0$ el conjunto de cantor, consideremos a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \times \{0\}$, sea A_0 el conjunto de todas las semicircunferencias centradas en el punto $(\frac{1}{2}, 0)$ en el plano superior que pasan por alguno de los puntos de $\mathcal{C}$, A_1 el conjunto de todas las semicircunferencias en el plano inferior centradas $(\frac{5}{6}, 0)$ y que pasan por alguno de los puntos de $\mathcal{C} \cap [\frac{2}{3}, 1]$, A_2 el conjunto de todas las semicircunferencias en el plano inferior centradas en el punto $(\frac{5}{18}, 0)$ y que pasan por alguno de los puntos de $\mathcal{C} \cap [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$. En general para $n \geq 1$ sea A_n el conjunto de todas las semicircunferencias en el plano inferior centradas en el punto $(\frac{5}{2(3^n)}, 0)$ y que pasan por alguno de los puntos en $\mathcal{C} \cap [\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}]$. Se define el arcoíris de Knaster como la cerradura del conjunto*

$$A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

Para ver un bosquejo del arcoíris de Knaster vea la Figura 1.1.

En [2, Teorema 8, pág 213] se muestra una prueba de que el arcoíris de Knaster es un continuo indescomponible.

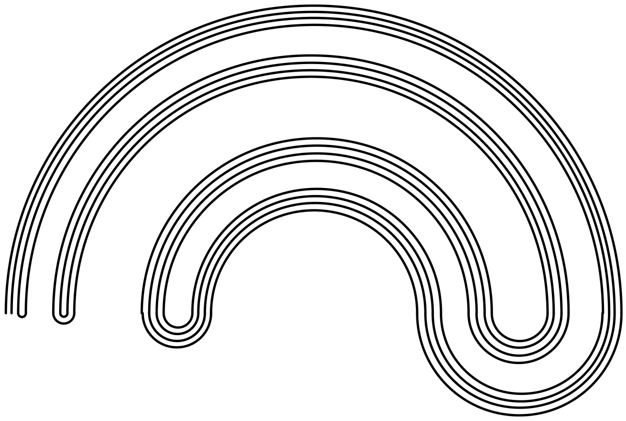


Figura 1.1: Bosquejo del Arcoíris de Knaster.

1.6. Homeomorfismos

Definición 1.30 *Sean X y Y dos espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ es un homeomorfismo si es una función biyectiva, continua y con f^{-1} continua.*

Decimos que los espacios X y Y son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos. La relación de homeomorfismo es una relación de equivalencia, es decir, es reflexiva, simétrica y transitiva. La siguiente equivalencia de homemorfismo será con frecuencia usada más adelante.

Teorema 1.23 *Sean M un espacio compacto de Hausdorff, K un espacio de Hausdorff y $f : M \to K$ es una función continua y biyectiva, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración.
Basta con demostrar que f^{-1} es continua. Dado $y \in K$ existe un único $x \in M$ tal que $f(x) = y$. Sea $U \neq M$ un abierto que contiene al punto x entonces $M \setminus U$ es un cerrado, dado que un cerrado en un espacio compacto de Hausdorff es compacto $M \setminus U$ es compacto. Así $f(M \setminus U)$ es compacto, por Teorema 1.10 $f(M \setminus U)$ es cerrado. Entonces $V = K \setminus f(M \setminus U)$ es un abierto en K que contiene al punto y y $f^{-1}(V) = f^{-1}(K) \setminus f^{-1}(f(M \setminus U)) = U$. Por tanto f^{-1} es una función continua. $\square$

Definición 1.31 *Decimos que un espacio topológico homeomorfo al intervalo $[0, 1]$ es un arco.*

Si un continuo X es un arco, entonces existe un homeomorfismo $h : [0, 1] \to X$. Sean $p, q \in X$ tales que $h(0) = p$ y $h(1) = q$, así los conjuntos

$h((0,1])$ y $h([0,1))$ son conexos. Si $g : [0,1] \to X$ es otro homeomorfismo, observemos que

$$g^{-1}(h(0,1]) = g^{-1}(X \setminus \{p\}) = [0,1] \setminus g^{-1}(\{p\}),$$
y
$$g^{-1}(h[0,1)) = g^{-1}(X \setminus \{q\}) = [0,1] \setminus g^{-1}(\{q\}).$$

Entonces los conjuntos $[0,1] \setminus g^{-1}(\{p\})$ y $[0,1] \setminus g^{-1}(\{q\})$ son conexos, por lo cual $\{g(0), g(1)\} = \{p, q\}$. A los puntos p y q les llamaremos puntos finales de X.

Por lo que todo arco contiene dos puntos de no corte, inversamente un continuo que contiene únicamente dos puntos de no corte es un arco, la demostración de este resultado puede encontrarse en [2, Teorema 1, pág. 179]

Teorema 1.24 *Sea X un continuo, X es un arco si y sólo si exactamente dos de sus puntos son de no corte.*

Capítulo 2

Límites inversos sobre el intervalo $[0,1]$

A manera de introducción en este capítulo comenzamos con el estudio de los límites inversos sobre el intervalo $[0,1]$. Determinaremos bajo que condiciones el límite inverso sobre el intervalo $[0,1]$ es un continuo y presentamos los ejemplos más comunes, después veremos una generalización de los límites inversos sobre $[0,1]$.

Sean $I = [0,1]$ y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números enteros positivos. El límite inverso es un subespacio de $\mathbf{Q} = \prod_{i=1}^{\infty} I$, el cual esta dotado con la topología producto, a los elementos de $\mathbf{Q}$ los denotamos por letras negritas y si $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Q}$ entonces $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, ...)$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sean $f_i : I \to I$ funciones continuas, para nuestros fines representaremos con la letra $\boldsymbol{f}$ a la sucesión $f_1, f_2, f_3, \ldots$.

Definición 2.1 *El límite inverso de la sucesión $\boldsymbol{f}$ es el conjunto de todos los elementos $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Q}$ tales que $x_i = f_i(x_{i+1})$ para toda $i \in \mathbb{N}$.*

Denotaremos al límite inverso de la sucesión $\boldsymbol{f}$ por $\varprojlim \boldsymbol{f}$, a la sucesión $\boldsymbol{f}$ la llamaremos sucesión de funciones de límite inverso y si f es una función continua perteneciente a una sucesión $\boldsymbol{f}$ la llamaremos función de ligadura. Frecuentemente haremos uso del Teorema 1.8, en donde la topología producto de $\mathbf{Q}$ coincide con la topología métrica sobre $\mathbf{Q}$ con métrica definida en el Ejemplo 1.4.

Es natural preguntarnos: ¿Bajo que condiciones la sucesión $\boldsymbol{f}$ nos proporciona un límite inverso no vacío?, veamos que para cualesquiera sucesión de límite inverso $\boldsymbol{f}$ de funciones continuas definidas en el intervalo $[0,1]$ se produce un límite inverso no vacío. En el estudio de los límites inversos por conveniencia denotamos por π_n a la función n-ésima proyección del $\varprojlim \boldsymbol{f}$ sobre I.

Ejemplo **2.1** *Sea $\boldsymbol{f}$ una sucesión de funciones de I a I, donde $f_1(x) = 1 - x$ para $x \in I$ y $f_i(x) = \frac{x}{i-1}$ para $x \in I$ si $i > 1$. Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un punto.*

Demostración.
Es claro que el punto $(1, 0, 0, \ldots) = (f_1(0), f_2(0), \ldots) \in \varprojlim \boldsymbol{f}$. Sea $\boldsymbol{x}$ un punto en el límite inverso de la sucesión $\boldsymbol{f}$, ya que $x_2 = f_2(x_3), x_3 = f_3(x_4), \ldots$ tenemos que $x_2 = f_2 \circ f_3 \circ \cdots \circ f_{n-2} \circ f_{n-1}(x_n) = \frac{x_n}{(n-2)!} < \frac{1}{n-2}$, lo cual pasa para cada entero positivo n, por lo que $x_2 = 0$ entonces $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0 \ldots)$. Por lo tanto $\varprojlim \boldsymbol{f} = \{(1, 0, 0. \ldots)\}$. □

Para una sucesión de funciones $\boldsymbol{f} = f_1, f_2, \ldots$, si m, n son enteros positivos y $n < m$ denotamos por f_{nm} a la composición $f_n \circ f_{n+1} \circ \cdots \circ f_{m-1}$, bajo esta notación $f_{n\,n+1} = f_n$ y por conveniencia f_{nn} denota a la función identidad en I. También para una función f denotaremos por f^2 a la composición $f \circ f$ y para $j > 2$ denotaremos por f^j a la composición $f \circ f^{j-1}$, es claro que para la sucesión de funciones $\boldsymbol{f} = f, f, \ldots$, si $n < m$ entonces $f_{nm} = f^{m-n}$.

Definición 2.2 *Sea $R \subseteq \varprojlim \boldsymbol{f}$, R es una región si existe un entero positivo n y un subconjunto abierto O de I tal que $R = \pi_n^{-1}(O)$*

Esta definición es bastante natural, ya que pensamos en el límite inverso como subespacio de $\mathbf{Q}$, el siguiente paso es ver que el conjunto de todas las regiones forman una base para nuestro límite inverso.

Teorema 2.1 *El conjunto de todas las regiones es una base para la topología sobre $\varprojlim \boldsymbol{f}$.*

Demostración.
Sea $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$ y O un abierto básico en $\mathbf{Q}$, entonces existen abiertos $O_1, O_2, ..., O_n$ en I tales que O es homeomorfo a $O_1 \times O_2 \times \cdots O_n \times \mathbf{Q}$, supongamos que $\boldsymbol{x} \in O \cap \varprojlim \boldsymbol{f}$. Ya que $f_{in}(\pi_n(\boldsymbol{x})) = \pi_i(\boldsymbol{x})$ para $i < n$ y f_{in} es continua existe U_i abierto en I tal que $x_n \in U_i$ y $f_{in}(U_i) \subseteq O_i$ para $i < n$. Así, si $U = \bigcap_{i=1}^{n-1} U_i$ entonces $\pi_n^{-1}(U)$ es una región tal que $\boldsymbol{x} \in \pi_n^{-1}(U)$. Ya que $f_{in}(U) \subseteq O_i$ si $\boldsymbol{y} \in \pi_n^{-1}(U)$ entonces $\pi_n(\boldsymbol{y}) \in U$ y $\pi_i(\boldsymbol{y}) \in O_i$ para $i < n$ por lo que $y \in O$, en consecuencia $\pi_n^{-1}(U) \subseteq O$. Por lo tanto, el conjunto de las regiones es una base para la topología sobre $\varprojlim \boldsymbol{f}$. □

Teorema 2.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}, \pi_n$ es una función continua.*

Demostración.
Sean $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$ y U un abierto en I tales que $\pi_n(\boldsymbol{x}) = x_n \in U$, luego $\pi_n^{-1}(U)$ es una región que contiene a $\boldsymbol{x}$ y ya que π_n es función se tiene que $\pi_n(\pi_n^{-1}(U)) \subseteq U$. Por lo tanto π_n es continua. $\square$

El siguiente conjunto es bastante útil y su relación con el límite inverso de $\boldsymbol{f}$ nos ayudará a probar que este es un continuo.

Definición 2.3 *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $G_n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{Q} \,|\, x_i = f_i(x_{i+1}), i \leq n\}$.*

Observemos que para un punto $\boldsymbol{x} \in G_{i+1}$, $x_j = f_j(x_{j+1})$ para cada $1 \leq j \leq i+1$, en particular para cada $j \leq i$ por lo que $\boldsymbol{x} \in G_i$ y así, para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $G_{i+1} \subseteq G_i$.

Lema 2.1 *Para la sucesión $\boldsymbol{f}$ se tiene que:*

$$\varprojlim \boldsymbol{f} = \bigcap_{n\geq 1} G_n.$$

Demostración
Notemos que, $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$ si y sólo si para toda $i \geq 1$, $x_i = f_i(x_{i+1})$ si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_i = f_i(x_{i+1})$ si $i \leq n$ si y solo si $\boldsymbol{x} \in G_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. $\square$

De los Teoremas 1.13 y 1.19 $\mathbf{Q}$ es un continuo, lo cual nos será de utilidad en los siguientes teoremas.

Teorema 2.3 *Si n es un entero positivo entonces G_n es conjunto compacto no vacío.*

Demostración.
Dado $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Q} \setminus G_n$ existe $j \leq n$ tal que $x_j \neq f_j(x_{j+1})$ y existen U, V abiertos ajenos en I tales que $x_j \in U$ y $f_j(x_{j+1}) \in V$. De la continuidad de f_j existe un abierto W en I tal que $x_{j+1} \in W$ y $f_j(W) \subseteq V$ de esto último el conjunto de puntos $\boldsymbol{y} \in \mathbf{Q}$ tales que $\pi_j(\boldsymbol{y}) \in U$ y $\pi_{j+1}(\boldsymbol{y}) \in W$ es un abierto en $\mathbf{Q}$ ajeno a G_n. Para ver que G_n es no vacío notemos que si $x \in I$ el punto

$$(f_{1\,n}(x), f_{2\,n}(x), ..., f_{n\,n+1}(x), x, x...) \in G_n.$$

Por lo tanto G_n es un cerrado no vacío, al ser un cerrado no vacío del espacio compacto $\mathbf{Q}$ se sigue que G_n es compacto. $\square$

Teorema 2.4 *Si n es un entero positivo, entonces G_n es conexo.*

Demostración.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h : \mathbf{Q} \to G_n$ la función definida como:

$$h(\boldsymbol{x}) = (f_{1\,n+1}(x_{n+1}), f_{2\,n+1}(x_{n+1}), \ldots, f_{n\,n+1}(x_{n+1}), x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$$

Ya que cada $f_{i\,n+1}$ es continua para $i \leq n$, h es continua. Por otro lado $h(\mathbf{Q}) \subseteq G_n$ y si $\boldsymbol{x}$ es un elemento de G_n entonces $h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ y así $G_n \subseteq h(\mathbf{Q})$, entonces $h(\mathbf{Q}) = G_n$. Al ser $\mathbf{Q}$ conexo, G_n es imagen continua de un conjunto conexo y por tanto es conexo. $\square$.

De la conexidad y compacidad del conjunto G_n se obtiene el resultado deseado.

Teorema 2.5 *Sean $\boldsymbol{f} = f_1, f_2, ...$ una sucesión de funciones continuas de I a I, entonces el límite inverso de $\boldsymbol{f}$ es un continuo.*

Demostración.
Por los teoremas 2.3 y 2.4, G_n es un continuo y además $G_1 \supset G_2 \supset \cdots$, por lo que $G_1, G_2, \ldots$ es una colección anidada de continuos, así por el Teorema 1.20, $\bigcap_{n\geq 1} G_n = \varprojlim \boldsymbol{f}$ es un continuo. $\square$

El siguiente teorema nos será de utilidad mas adelante.

Teorema 2.6 *Si X es un subconjunto cerrado de $\varprojlim \boldsymbol{f}$ y para cada i, $\pi_i(X) = I$ entonces $X = \varprojlim \boldsymbol{f}$.*

Demostración.
Sean $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$ y R una región que contiene a $\boldsymbol{x}$. Entonces, existe un entero n y un abierto O de I tal que $\boldsymbol{x} \in \pi_n^{-1}(O)$, sea $t \in I$ tal que $t \neq x_n$, ya que $\pi_i(X) = I$ para cada i existe $y_{n+1} \in I$ tal que $f_n(y_{n+1}) = t$, para y_{n+1} existe y_{n+2} tal que $f_{n+1}(y_{n+2}) = y_{n+1}$, continuando de esta manera obtenemos una secuencia de puntos $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots$ tales que $f_{n+j}(y_{n+j+1}) = y_{n+j}$ para $j \geq 1$. El punto

$$\boldsymbol{t} = (f_{1\,n}(t), f_{2\,n}(t), \ldots, f_{n-1\,n}(t), t, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots)$$

esta en $\pi_n^{-1}(O)$, en consecuencia $\pi_n^{-1}(O) \cap X \neq \emptyset$. Así $\boldsymbol{x}$ es punto límite de X, al ser X un cerrado contiene todos sus puntos límite y por tanto $\boldsymbol{x} \in X$. $\square$

2.1. Ejemplos de límites inversos.

En la siguiente sección estudiaremos bajo que condiciones la sucesión $\boldsymbol{f}$ produce un límite inverso homeomorfo a un arco. Veremos algunos teoremas relacionados y también presentamos tres ejemplos que son muy frecuentes en la teoría de los límites inversos. Después analizaremos una generalización de los límites inversos con funciones continuas sobre I.

Ejemplo **2.2** *Sea f la función continua definida como $f(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1/2$ y $f(x) = 1$ si $1/2 < x \leq 1$, entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un arco* (Ver Figura 2.1).

Demostración.
Sea $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$, notemos que los puntos $(0, 0, \ldots)$ y $(1, 1, \ldots)$ están en el $\varprojlim \boldsymbol{f}$, supongamos que $\boldsymbol{x} \neq (0, 0, \ldots)$ y $\boldsymbol{x} \neq (1, 1, \ldots)$ por lo que existe n un entero positivo tal que $\pi_n(\boldsymbol{x}) = x_n \notin \{0, 1\}$, por la definición de f

$$f_{in}(x_n) = x_i \text{ para } i < n \text{ y } x_i = \tfrac{x_n}{2^{i-n}} \text{ para } i > n.$$

Entonces $\boldsymbol{x}$ es el único punto en $\varprojlim \boldsymbol{f}$ tal que $\pi_n(\boldsymbol{x}) = x_n$ por lo que $\pi_n^{-1}([0, x_n))$ y $\pi_n^{-1}((x_n, 1])$ son regiones ajenas cuya unión es $\varprojlim \boldsymbol{f} \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ y por lo tanto $\boldsymbol{x}$ es de corte. Por el Teorema 2.5, el $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un continuo y como $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es métrico, por el Teorema 1.22, tiene al menos dos puntos que no son de corte, por ello $(0, 0, \ldots)$ y $(1, 1, \ldots)$ no son de corte. Por lo tanto, por el Teorema 1.24 el $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un arco. □

El siguiente ejemplo también es un arco, pero la prueba es mas complicada. La diferencia radica en que ahora la parte constante de la función f del ejemplo anterior es “remplazada” por una función monótona decreciente.

Ejemplo **2.3** *Sean a un número tal que $1/2 < a < 1$, $f(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq 1/2$ y $f(x) = 2(a-1)(x - \frac{1}{2}) + 1$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un arco* (Ver Figura 2.2 para la gráfica de f).

Demostración.
Sea $M = \varprojlim \boldsymbol{f}$. Por el Teorema 2.5, M es un continuo. Por el Teorema 1.22, dicho continuo tiene al menos dos puntos que no son de corte. Notemos que f tiene exactamente dos puntos fijos: 0 y $p = \frac{a-2}{2a-3} > 0$, probaremos que los únicos puntos que no son de corte son $(0, 0, \ldots)$ y $(p, p, \ldots)$. Veamos primero que si $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$ es distinto de $(0, 0, \ldots)$ y $(p, p, \ldots)$ entonces $\boldsymbol{x}$ es de corte. Si existe n un entero tal que $x_n < a$ entonces por definición de f, $\pi_i(\boldsymbol{x}) = x_i = f_{in}(x_n)$ para $i < n$ y $\pi_i(\boldsymbol{x}) = x_i = \frac{x_n}{2^{i-n}}$

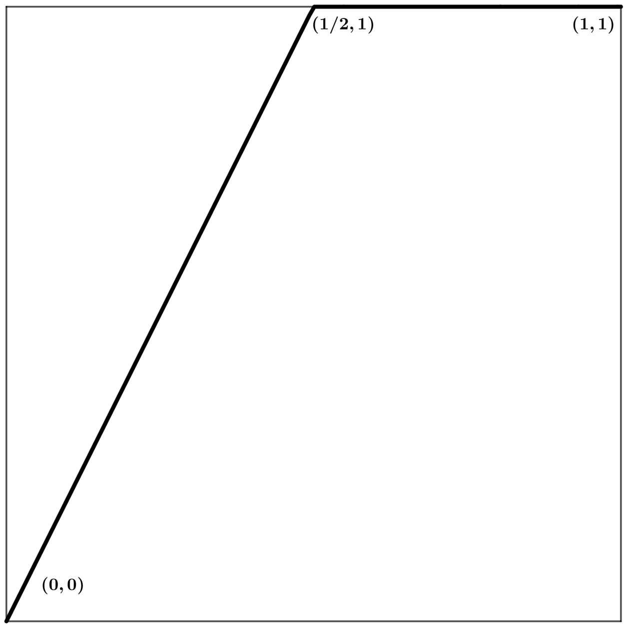


Figura 2.1: Una función cuyo límite inverso es un arco, pero no es un homeomorfismo.

para $i > n$, entonces $\pi_n^{-1}(x_n) = \boldsymbol{x}$; ya que $x_n \notin \{0,1\}$ pues $a < 1$, $\pi_n^{-1}([0,x_n)) \cup \pi_n^{-1}((x_n,1]) = \pi_n^{-1}(I \setminus \{x_n\}) = M \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ y por lo tanto, $\boldsymbol{x}$ es un punto de corte en M.

Ahora probaremos que si $\boldsymbol{x} \in M$ y $\boldsymbol{x} \neq (p,p,\ldots)$ entonces $x_n < a$ para algún entero n. Supongamos que para $\boldsymbol{x} \in M$, $x_n \geq a$ para toda n; inductivamente si $\alpha \geq a$ entonces $f^n(\alpha)$ esta entre $f^n(a)$ y $f^{n-1}(a)$, en efecto pues si $\alpha \geq a$ entonces $f(\alpha) \leq f(a)$ y ya que $f([a,1]) \subseteq [a,1]$ entonces $a \leq f(\alpha)$, supongamos que $f^n(\alpha)$ esta entre $f^n(a)$ y $f^{n-1}(a)$, hay dos casos posibles:

i) Si $f^n(a) \leq f^n(\alpha) \leq f^{n-1}(a)$, como $a \leq f^n(a)$ entonces $f^{n+1}(a) \geq f^{n+1}(\alpha) \geq f^n(a)$

ii) Si $f^{n-1}(a) \leq f^n(\alpha) \leq f^n(a)$, como $a \leq f^{n-1}(a)$ entonces $f^n(a) \geq f^{n+1}(\alpha) \geq f^{n+1}(a)$.

Por lo que para toda n, $f^n(\alpha)$ esta entre $f^n(a)$ y $f^{n-1}(a)$. Así x_1 esta entre $f^n(a)$ y $f^{n-1}(a)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $a \leq f^2(a) \leq f^4(a) \leq f^6(a) \leq \ldots$ entonces la sucesión $\{f^i(a)\}_{i\in\mathbb{N}}$ contiene una subsuceción creciente acotada en un espacio compacto, por lo que $\{f^i(a)\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge;

sea $l \in I$ dicho punto al que converge, entonces:

$$\begin{aligned} f(l) &= f(\lim_{n\to\infty} f^n(a)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(a) \\ &= l \end{aligned}$$

Como f tiene dos puntos fijos y $f^n(a) > a$ para toda n, $l \neq 0$ por lo tanto $l = p$; así que $x_1 = p$ y ya que $x_n \geq a$, $\boldsymbol{x} = (p, p, \ldots)$ lo cual no es posible. Por lo tanto existe n un entero tal que $x_n < a$.

Para $\boldsymbol{x} \in M$ hay tres casos: $\boldsymbol{x} = (0, 0, \ldots)$, $\boldsymbol{x} = (p, p, \ldots)$ o existe n tal que $x_n < a$, pero si $x_n < a$ se tiene que $\boldsymbol{x}$ es de corte, entonces los únicos puntos que no son de corte son $(0, 0, \ldots), (p, p, \ldots)$, por lo tanto por el Teorema 1.24, M es un arco. □

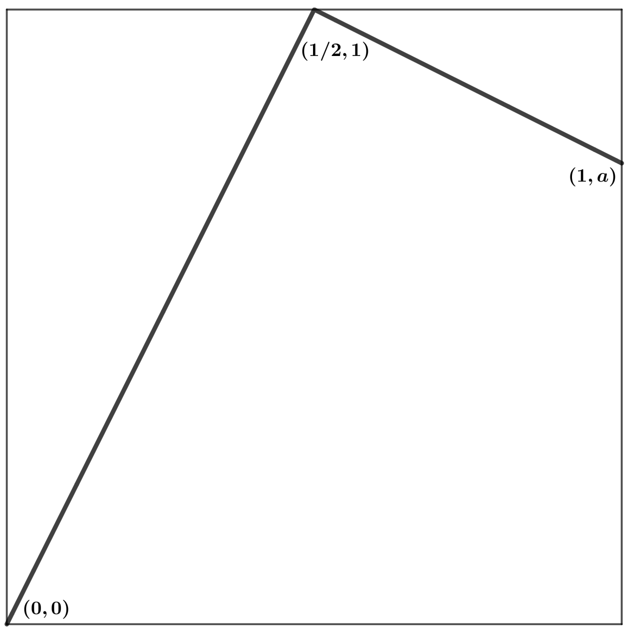


Figura 2.2: Gráfica de la función f.

Si $\boldsymbol{f}$ es una sucesión de funciones de límite inverso y $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$, entonces por definición para enteros fijos i, j con $i < j$ $x_i = f_{ij}(x_j)$ y si $i < s < t$ entonces $x_i = f_{is}(f_{sj}(x_j)) = f_{ij}(x_j)$, lo cual nos hace ver que podemos omitir los términos que están entre i y j y obtener un nuevo punto $\boldsymbol{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_i, x_j, x_{j+1}, \ldots)$ el cual pertenece al límite inverso de la sucesión $\boldsymbol{g} = f_1, f_2, \ldots, f_i, f_j, f_{j+1}, \ldots$.

Teorema 2.7 *Sea* $\boldsymbol{f}$ *una sucesión de funciones continuas, si* $n_1, n_2, n_3, \ldots$ *es una sucesión creciente de enteros positivos y para cada* $i \in \mathbb{N}, g_i = f_{n_i\, n_{i+1}}$*, entonces* $K = \varprojlim \boldsymbol{g}$ *es homeomorfo a* $M = \varprojlim \boldsymbol{f}$*.*

Demostración.
Sea $\varphi : M \to K$ la función definida por $\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$. Veamos que φ es continua, sea $\boldsymbol{x} \in M$ y U la región en K tal que $\varphi(x) \in U$, entonces existe j y un abierto O en I tal que $\varphi(\boldsymbol{x}) \in \pi_j^{-1}(O) = U$, notemos que $V = \pi_{n_j}^{-1}(O)$ es una región en M que contiene al punto $\boldsymbol{x}$ y si $\boldsymbol{y} \in V$ entonces $y_{n_j} \in O$ y así $\varphi(\boldsymbol{y}) \in U$, por tanto φ es continua.
Para ver que φ es inyectiva supongamos que $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{y})$ entonces $x_{n_i} = y_{n_i}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Para k un entero hay dos posibilidades: $k < n_1$ o existe $j > 1$ tal que x_k este entre las coordenadas $x_{n_{j-1}}$ y x_{n_j}, en cualquiera de los dos casos se tiene que $x_k = f_{k\, n_j}(x_{n_j}) = f_{k\, n_j}(y_{n_j}) = y_k$ para $j \geq 1$, por lo que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ y por lo tanto φ es inyectiva.
Sea $\boldsymbol{y} = (y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots) \in K$, para $i < n_1$ consideremos a $x_i = f_{i\, n_1}(y_{n_1})$ y si $n_{j-1} < i < n_j$ para algún $j \geq 1$ tomemos a $x_i = f_{i\, n_{j+1}}(y_{n_{j+1}})$, el punto $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in M$ cumple que $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, por lo que $\varphi(M) = K$. Por el Teorema 2.5 M es compacto, así φ es una función continua biyectiva definida en un espacio compacto y dado que K es de Hausdorff, φ es un homeomorfismo. □

La continuidad de las funciones en la sucesión $\boldsymbol{f}$ del teorema anterior es muy importante, por ejemplo para $\boldsymbol{f} = f_1, f_2, \ldots$, donde $f_1(x) = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ y $f_1(x) = 1$ para $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ y $f_i(x) = x$ para $x \in [0,1]$ con $i > 1$, entonces el $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es unión de los conjuntos $\{(0, t, t, \ldots) \in \mathbf{Q} \mid t \in [0, \frac{1}{2}]\}$ y $\{(1, t, t, \ldots) \in \mathbf{Q} \mid t \in (\frac{1}{2}, 1]\}$ por lo que no es conexo, mientras que para $g_i = f_{i+1}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, $\varprojlim \boldsymbol{g}$ es un arco.

Ahora veamos un caso mas general de cuando un límite inverso es un arco.

Teorema 2.8 *Si para cada* $i \in \mathbb{N}$*,* $g_i : I \to I$ *es una función continua, monótona y sobreyectiva entonces* $\varprojlim \boldsymbol{g}$ *es un arco.*

Demostración.
Ya que la función es continua definida en todo I, el límite inverso de $\boldsymbol{g}$ es un compacto no vacío. Para cada entero positivo i, $g_i(0)$ es 0 o 1. Si existe un entero positivo n tal que $g_i(0) = 0$ para $i \geq n$, entonces definamos $f = g_{n+i}$ para $i \geq 0$. En el otro caso, sea $n_1, n_2, \ldots$ la sucesión de enteros positivos tal que g_{n_i} es decreciente, definamos

$$m_1 = n_1, m_2 = n_3, m_3 = n_5, \ldots, m_i = n_{2i-1}, \ldots.$$

Observemos que las funciones $f_{m_i} = g_{m_i\,m_{i+1}}$ son crecientes. Por tanto en cualquier caso podemos usar el Teorema 2.7 para obtener un límite inverso homeomorfo a $\varprojlim \boldsymbol{g}$; por lo que supongamos que g_i es monótona creciente para cada entero positivo i.

Para $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{g}$ distinto de $(0, 0, \ldots)$ y $(1, 1, \ldots)$. Sean

$$H = \bigcup_{\substack{i>0 \\ x_i \neq 0}} \pi_i^{-1}([0, x_i)) \text{ y } K = \bigcup_{\substack{i>0 \\ x_i \neq 1}} \pi_i^{-1}((x_i, 1])$$

abiertos en $\varprojlim \boldsymbol{g}$. Si $\boldsymbol{y} \in \varprojlim \boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ entonces existe i tal que $\pi_i(\boldsymbol{y}) \neq \pi_i(\boldsymbol{x})$. Así, si $x_i \notin \{0, 1\}$ entonces $\pi_i(\boldsymbol{y}) \in [0, x_i)$ o $\pi_i(\boldsymbol{y}) \in (x_i, 1]$. Por lo que $\boldsymbol{y} \in H \cup K$, así $\varprojlim \boldsymbol{g} = H \cup K$. Ahora veamos que H, K son ajenos, supongamos lo contrario, es decir, que existe $\boldsymbol{y} \in H \cap K$ por lo que existen i, j enteros positivos tales que $y_j \in (x_j, 1]$ y $y_i \in [0, x_i)$. Si $i < j$, ya que $x_j < y_j$ y g_l es monótona creciente para cada $l \in \mathbb{N}$ entonces $x_i = g_{i\,j}(x_j) \leq g_{i\,j}(y_j) = y_i$ lo cual no es posible ya que $y_i < x_i$. Análogamente, si $j < i$, entonces $y_j = f_{j\,i}(y_i) \leq f_{j\,i}(x_i) = x_j$ lo cual no es posible ya que $x_j < y_j$. Por lo tanto, $H \cap K = \emptyset$ y ya que H, K son abiertos el $\varprojlim \boldsymbol{g} \setminus \{\boldsymbol{x}\}$ no es conexo.

Para terminar la prueba falta ver que los puntos $(0, 0, \ldots)$ y $(1, 1, \ldots)$ no son de corte. Ya que el $\varprojlim \boldsymbol{g}$ es un continuo, tiene al menos dos puntos de no corte, vimos que si $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{g} \setminus \{(0, 0 \ldots), (1, 1, \ldots)\}$ entonces $\boldsymbol{x}$ es de corte, por lo que esto obliga a que $(0, 0, \ldots)$ y $(1, 1, \ldots)$ sean de no corte. Por el Teorema 1.24, el $\varprojlim \boldsymbol{g}$ es un arco. $\square$

En el siguiente teorema describimos un subcontinuo de un límite inverso. Suponiendo que nuestras funciones de ligadura son sobreyectivas, uno puede determinar un subcontinuo de $M = \varprojlim \boldsymbol{f}$ tomando subintervalos de I digamos $[a_1, b_1]$, luego existe un subintervalo $[a_2, b_2]$ tal que $f_1([a_2, b_2]) = [a_1, b_1]$. Continuando de esta manera para cada n podemos encontrar un subintervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ tal que $f_n([a_{n+1}, b_{n+1}]) = [a_n, b_n]$; para cada punto $x_1 \in [a_1, b_1]$ nuestra construcción asegura que existe un punto $\boldsymbol{x} \in M$ tal que $x_i \in [a_i, b_i]$ para cada i. Sea K el conjunto de dichos puntos, en consecuencia $K = M \cap ([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots)$. Para hacer esto tendríamos que extender nuestra definición de límite inverso a sucesiónes como $f_1|_{[a_1,b_1]}, f_2|_{[a_2,b_2]}, \ldots$, el siguiente teorema muestra que esto es posible.

Teorema 2.9 *Sean $M = \varprojlim \boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{J}$ una sucesión de subintervalos de I tal que para cada i, $f_i(J_{i+1}) = J_i = [a_i, b_i]$. Para cada $x \in [0, 1]$ hagamos*

$h_i(x) = a_i + x(b_i - a_i)$, consideremos a K el conjunto de todos los puntos $\boldsymbol{x} \in M$ tales que $x_i \in J_i$ para cada i y sea $y_i = h_i^{-1}(x_i)$. Finalmente, para cada i y $x \in I$, definamos $g_i(x) = h_i^{-1}(f_i(h_{i+1}(x)))$. Entonces g_i es una función sobreyectiva de I a I tal que $g_i(y_{i+1}) = y_i$ y K es homeomorfo a $\varprojlim \boldsymbol{g}$.

Demostración.
Como h_i es un homeomorfismo de I sobre J_i, $y_i = h_i^{-1}(x_i)$ es único para cada $x_i \in J_i$. Ya que $f_i(J_{i+1}) = J_i$ se tiene que $g_i(I) = I$ y

$$g_i(y_{i+1}) = h_i^{-1}(f_i(h_{i+1}(y_{i+1}))) = h_i^{-1}(f_i(x_{i+1})) = h_i^{-1}(x_i) = y_i.$$

Sea $\varphi : \varprojlim \boldsymbol{g} \to M$ la función definida por $\varphi(\boldsymbol{y}) = (h_1(y_1), h_2(y_2), \ldots)$, notemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{y}) &= (h_1(y_1), h_2(y_2), \ldots) \\
&= (h_1(g_1(y_2)), h_2(g_2(y_3)), \ldots) \\
&= (f_1(h_2(y_2)), f_2(h_3(y_3)), \ldots) \\
&= (f_1(x_2), f_2(x_3), \ldots) \\
&= \boldsymbol{x}.
\end{aligned}$$

Por lo cual $\varphi(\boldsymbol{y}) \in M$. Como h_i es inyectiva para cada $i \in \mathbb{N}$, φ es inyectiva. Si $\boldsymbol{x} \in M$, entonces

$$g_i(h_{i+1}^{-1}(x_{i+1})) = h_i^{-1}(f_i(x_{i+1})) = h_i^{-1}(x_i)$$

por lo cual el punto

$$\boldsymbol{z} = (h_1^{-1}(x_1), h_2^{-1}(x_2), \ldots)$$

pertenece al $\varprojlim \boldsymbol{g}$ y $\varphi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}$, por lo que $\varphi(\varprojlim \boldsymbol{g}) = K$.

Falta ver que φ es continua. Sea U la región en M tal que $\varphi(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \in U$, por lo que existen $i \in \mathbb{N}$ y un abierto O tales que $x_i \in O$ y $\pi_i^{-1}(O) = U$. Ya que h_i es continua, $h_i^{-1}(O)$ es abierto en I por ello $\pi_i^{-1}(h_i^{-1}(O))$ es una región en $\varprojlim \boldsymbol{g}$ tal que si $\boldsymbol{w} \in \pi_i^{-1}((h_i^{-1}(O)))$, entonces $w_i \in h_i^{-1}(O)$. De esta manera, si $h(w_i) \in O$ entonces $\varphi(\boldsymbol{w}) \in U$. Como el $\varprojlim \boldsymbol{g}$ es compacto y φ es una función biyectiva y continua, φ es un homeomorfismo. Por lo tanto, K y $\varprojlim \boldsymbol{g}$ son homeomorfos. □

Con ayuda de los teoremas anteriores otra forma de probar que el límite inverso de la función del Ejemplo 2.3 es un arco es la siguiente.

Ejemplo **2.4** *Sea f la función del Ejemplo 2.3, es decir para $\frac{1}{2} < a < 1$, $f(x) = 2x$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ y $f(x) = 2(a-1)(x - \frac{1}{2}) + 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, entonces el $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es una arco.*

Demostración
Sea $M = \varprojlim \boldsymbol{f}$, anteriormente vimos que si $\boldsymbol{x} \in M$ entonces $\boldsymbol{x} = (0, 0, \ldots)$, $\boldsymbol{x} = (p, p, \ldots)$ o existe un entero n tal que $x_n < a$, en el último caso $x_i = f_{i\,n}(x_n)$ para $i < n$ y $x_i = \frac{x_n}{2^{i-n}}$ para $i > n$. Hagamos

$$A_0 = \left\{\boldsymbol{x} \in M \mid x_1 \in \left[0, \tfrac{1}{2}\right]\right\},$$

para $i \geq 1$

$$A_i = \left\{\boldsymbol{x} \in M \mid x_{i+1} \in \left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right]\right\}.$$

Veamos que A_i es un arco para cada $i \geq 0$. Para A_0 la secuencia $[a_1, b_1] = [0, \frac{1}{2}], [a_2, b_2] = [0, \frac{1}{4}], \ldots$ satisface que $f([0, \frac{1}{2^{i+1}}]) = [0, \frac{1}{2^i}]$. Por lo que por el Teorema 2.9, A_0 es homeomorfo al límite inverso de la sucesión $\boldsymbol{g}$, donde

$$g_i(x) = h_i^{-1}(f(h_{i+1}(x))) = h_i^{-1}(f(\tfrac{x}{2^{i+1}})) = h_i^{-1}(\tfrac{x}{2^i}) = \tfrac{2^i x}{2^i} = x.$$

Entonces, por el Teorema 2.8, A_0 es un arco. Análogamente A_1 es un arco. Para A_2, la secuencia $[a_1, b_1] = [a, 1], [a_2, b_2] = [\frac{1}{2}, 1], [a_3, b_3] = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \ldots$, cumple que $f([a_{i+1}, b_{i+1}]) = [a_i, b_i]$ y por el Teorema 2.9, A_2 es homeomorfo al límite inverso de la sucesión $\boldsymbol{g}$ donde $g_i = Id_{[0,1]}$ para $i \geq 2$ y

$$g_1(x) = h_1^{-1}(f(h_2(x))) = h_1^{-1}(f(\tfrac{1+x}{2})) = h_1^{-1}(x(a-1)+1) = \tfrac{x(a-1)+1-a}{1-a} = 1 - x.$$

En general, para A_n con $n > 2$ la secuencia

$$f^{n-1}([\tfrac{1}{2}, 1]), f^{n-2}([\tfrac{1}{2}, 1]), \ldots, f([\tfrac{1}{2}, 1]), [\tfrac{1}{2}, 1], [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}], [\tfrac{1}{8}, \tfrac{1}{4}], \ldots$$

satisface las condiciones del Teorema 2.9, por lo que A_n es homeomorfo al límite inverso de la sucesión $\boldsymbol{g}$.
Veamos las funciones de la sucesión $\boldsymbol{g}$, para $i < n - 2$ hay dos casos posibles:

i) $f^{n-(i+1)}(a) < f^{n-(i+2)}(a)$
Si $f^{n-(i+1)}(a) < f^{n-(i+2)}(a)$, entonces

$$f^{n-(i+1)}(a) = f(f^{n-(i+2)}(a)) \text{ y } f^{n-(i+2)}(a) = f(f^{n-(i+3)}(a))$$

por lo que $f^{n-(i+3)}(a) < f^{n-(i+2)}(a)$. Así, las funciones h_i y h_{i+1} del Teorema 2.9 son

$$h_i(x) = f^{n-(i+1)}(a) + x(f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+1)}(a))$$

y

$$h_{i+1}(x) = f^{n-(i+3)}(a) + x(f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+3)}(a)).$$

Por lo cual la función g_i esta dada por

$$\begin{aligned}
g_i(x) &= h_i^{-1}(f(h_{i+1}(x))) \\
&= h_i^{-1}(f(f^{n-(i+3)}(a) + x(f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+3)}(a))) \\
&= h_i^{-1}(2(a-1)(f^{n-(i+3)}(a) + x(f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+3)}(a) - \frac{1}{2}) + 1) \\
&= \frac{2(a-1)(f^{n-(i+3)}(a) + x(f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+3)}(a) - \frac{1}{2}) + 1}{f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+1)}(a)} \\
&\quad - \frac{f^{n-(i+1)}(a)}{f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+1)}(a)} \\
&= \frac{2(a-1)f^{n-(i+3)}(a) - (a-1) + 1}{f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+1)}(a)} \\
&\quad + \frac{2(a-1)x(f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+3)}(a)) - f^{n-(i+1)}(a)}{f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+1)}(a)} \\
&= \frac{f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+1)}(a) + 2(a-1)x(f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+3)}(a))}{f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+1)}(a)} \\
&= 1 + \frac{2(a-1)x(f^{n-(i+2)}(a) - f^{n-(i+3)}(a))}{2(a-1)(f^{n-(i+3)}(a) - f^{n-(i+2)}(a))} \\
&= 1 - x.
\end{aligned}$$

Por un procedimiento análogo, para $i = n-2$, $g_{n-2} = 1-x$ y al igual que en A_2, si $i = n-1$ entonces $g_{n-1} = 1-x$ y si $i \geq n$ entonces $g_i = Id_{[0,1]}$.

$ii) f^{n-(i+1)}(a) > f^{n-(i+2)}(a)$.
Análogamente, que en $i)$ solo basta con notar que $f^{n-(i+3)}(a) > f^{n-(i+2)}(a)$.

En cualquiera de los dos casos las funciones involucradas en el límite inverso de $\boldsymbol{g}$ son monótonas, por lo tanto el $\varprojlim \boldsymbol{g}$ es un arco y en consecuencia A_n es un arco.

Para ver que $M = \{(p, p, \ldots)\} \cup A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ es un arco observemos que A_0 intersecta a A_1 en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$, A_1 intersecta a A_2 en el punto $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots)$ y si $n \geq 3$, entonces A_n intersecta a A_{n-1} y a A_{n+1} en los puntos

$$(f^{n-2}(1), f^{n-3}(1), \ldots, f^{n-(n-1)}(1) = (a, 1, \tfrac{1}{2}, \ldots)$$

y

$$(f^{n-1}(1), f^{n-2}(1), \ldots, a, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4} \ldots)$$

respectivamente, de esto se sigue que si $\boldsymbol{x} \in (A_1 \cup A_2 \cup \cdots) \setminus \{(0,0,\ldots)\}$, entonces $\boldsymbol{x}$ es de corte. Por el Teorema 1.22, los únicos puntos que no son de corte son $(0,0\ldots)$ y $(p,p,\ldots)$, en consecuencia, por el Teorema 1.24, M es un arco.

Para finalizar notemos que el punto $\boldsymbol{p_i} = (p,p,\ldots,p,\frac{p}{2},\frac{p}{4},\ldots)$ (las primeras i coordenadas son p) pertenece a A_i para $i \geq 1$, por lo que

$$d(\boldsymbol{p_i},(p,p,\ldots)) = \sum_{j>i} \frac{|\frac{p}{2^{j-i}} - p|}{2^j} < \sum_{j>i} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^i}.$$

Así, para toda $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(\boldsymbol{p_n},(p,p,\ldots)) < \varepsilon$, de esto se sigue que $(p,p,\ldots)$ es un punto límite de $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$. Para visualizar los arcos que componen a M vea la Figura 2.3. $\square$

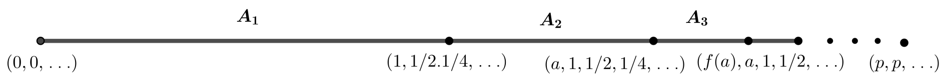


Figura 2.3: Continuo homeomorfo al límite inverso del Ejemplo 2.4.

En la función del Ejemplo 2.3, para $a = \frac{1}{2}$, $f^n(a)$ es 0 o 1 por lo que la sucesión $\{f^n(a)\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, podríamos suponer que el límite inverso resultante sea un arco, pero lo interesante es que no. Dicho límite inverso es homeomorfo a la cerradura de la gráfica de la función $sen(\frac{1}{x})$ para $x \in (0,1]$. Analizaremos un caso mas general cuya demostración nos permitirá ver como se comporta dicho límite inverso.

Si R es un rayo topológico y K es un continuo tal que $\mathrm{Cl}(R) \setminus R = K$, entonces decimos que K es el residuo de R o simplemente residuo para abreviar. Por conveniencia en el siguiente teorema f^0 representa la función identidad en I.

Teorema 2.10 (Ingram) *Supongamos que f es una función sobreyectiva de I a I, $c \in (0,1)$ y se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) $f([c,1]) \subseteq [c,1]$.

ii) $f_{|[0,c]}$ *es monótona.*

iii) Existe un entero positivo j tal que $f^j([0,c]) = I$.

Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es la cerradura de un rayo topológico R teniendo como residuo un continuo K. Más aún K es el conjunto de puntos $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$ tales que $\pi_i(\boldsymbol{x}) \in [c,1]$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Demostración.
Sabemos que $[c,1]$ es un conjunto compacto y conexo, al ser f^i continua para cada $i \in \mathbb{N}$, $f^i([c,1])$ es subconjunto compacto y conexo de I. Como $f([c,1]) \subseteq [c,1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^{i+1}([c,1]) \subseteq f^i([c,1])$, por lo cual $\{f^i([c,1])\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una colección anidada de conjuntos compactos y conexos, por el Teorema 1.20, $M = \bigcap_{i\geq 0} f^i([c,1])$ es no vacío, compacto y conexo. Al ser M compacto y conexo en I, M es un punto o un intervalo. Por definición de M tenemos que $f(M) = M$. Sea

$$K = \{\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f} \mid \pi_i(\boldsymbol{x}) \in [c,1] \text{ para toda } i \in \mathbb{N}\}.$$

Si $\boldsymbol{x} \in K$ entonces $x_1 = \pi_1(\boldsymbol{x}) \in f^j([c,1])$ para cada $j \geq 1$ y así $x_1 \in M$, usando que $f(M) = M$ vemos que $\pi_j(\boldsymbol{x}) \in M$ para cada $j \geq 1$. Si M es un punto entonces K es degenerado; mientras que si M es un intervalo, por el Teorema 2.9, existe una sucesión $\boldsymbol{g}$ de funciones sobre I tal que el límite inverso de $\boldsymbol{g}$ es homeomorfo a K y por el Teorema 2.5, el $\varprojlim \boldsymbol{g}$ es un continuo. Por lo que K es un continuo.

Sea $R_n = \{\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f} | \pi_i(\boldsymbol{x}) \in [0,c] \text{ para } i \geq n\}$. Para cada $n \geq 1$, por el Teorema 2.9, existe una sucesión $\boldsymbol{h} = h_1, h_2, \ldots$ de funciones sobreyectivas tal que h_i es monótona para $i \geq n$ y R_n es homeomorfo a $\varprojlim \boldsymbol{h}$, por el Teorema 2.7 podemos fijarnos en la sucesión de límite inverso $\boldsymbol{h}' = h_n, h_{n+1}, \ldots$, donde los límites inversos de $\boldsymbol{h}'$ y $\boldsymbol{h}$ son homeomorfos, notemos que en la sucesión $\boldsymbol{h}'$ las funciones de ligadura son monótonas, por el Teorema 2.8, el $\varprojlim \boldsymbol{h}'$ es un arco, lo cual implica que $\varprojlim \boldsymbol{h}$ es un arco y esto implica que R_n es un arco. Al ser f una función sobreyectiva y $f([c,1]) \subseteq [c,1]$ se tiene que $[0,c] \subseteq f([0,c])$, por lo que para cada $i \geq 1$, $[0,c] \subseteq f(\pi_{i+1}(R_{i+1}))$ y así $R_i \subseteq R_{i+1}$, es decir,

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots$$

y

$$R_{n+1} = R_n \cup \{\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f} \mid \pi_i(\boldsymbol{x}) \in [0,c] \text{ si } i \geq n+1 \text{ y } \pi_i(\boldsymbol{x}) \in [c,1] \text{ si } i \leq n\}.$$

Por lo tanto $R = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i$ es un rayo.

Falta probar que K es el residuo de R. Sea $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{f} \setminus K$, para $\pi_i(\boldsymbol{x})$ hay dos casos

i) Si $\pi_i(\boldsymbol{x}) < c$, entonces $\boldsymbol{x} \in R_i$.

ii) Si $x_i = \pi_i(\boldsymbol{x}) \geq c$, entonces por hipótesis existe un entero j tal que $f^j([0,c]) = I$, por lo cual existe $x_{i+j} \in [0,c]$ tal que $f^j(x_{i+j}) = x_i$ y así $\boldsymbol{x} \in R_{i+j}$.

Por tanto $\varprojlim \boldsymbol{f} = K \cup R$.
Debemos probar que cada punto de K es un punto límite de R. Por hipótesis, existe un entero positivo j tal que $f^j([0,c]) = I$, si $g = f^j$, por el Teorema 2.7, existe un homeomorfismo $h : \varprojlim \boldsymbol{f} \to \varprojlim \boldsymbol{g}$, sea $h(K) = K'$ el conjunto de puntos $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{g}$ tales que $\pi_i(\boldsymbol{x}) \in [c,1]$ para cada $i \in \mathbb{N}$; probaremos que cada punto de K' es un punto límite de $R' = h(R)$. Sea $\boldsymbol{x} \in K'$ y O una región tal que $\boldsymbol{x} \in O$, entonces existen un entero m y un abierto U de I tal que $\pi_m^{-1}(U) = O$ y $\pi_m(\boldsymbol{x}) \in U$. Como $g([0,c]) = I$ existe un elemento $y_{m+1} \in [0,c]$ tal que $g(y_{m+1}) = x_m$, luego existe $y_{m+2} \in [0,c]$ tal que $g(y_{m+2}) = y_{m+1}$, continuando de esta manera obtenemos una secuencia de puntos $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots$ tal que $g(y_{m+i+1}) = y_{m+i}$ para $i \geq 1$. El punto $\boldsymbol{z}$ definido como $\pi_l(\boldsymbol{z}) = \pi_l(\boldsymbol{x})$ si $l \leq m$ y $\pi_l(\boldsymbol{z}) = y_l$ si $l > m$ es un punto de R' en O, luego existen únicos puntos $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ tales que $h(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{x}$ y $h(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{z}$, notemos que $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in h^{-1}(O)$ con $\boldsymbol{u} \in K$ y $\boldsymbol{v} \in R$. En consecuencia $\boldsymbol{u}$ es punto límite de R y por lo tanto K es el residuo de R. □

El siguiente ejemplo es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

Ejemplo **2.5** *Sea f la función continua definida como $f(x) = 2x$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ y $f(x) = \frac{3}{2} - x$ si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es unión de un rayo R y un arco K, donde K es el residuo de R (Ver Figura 2.4).*

Ya que el límite inverso del Ejemplo 2.5 es unión de un rayo topológico y un arco, lo interesante es construir tal homemomorfismo. Nos ayudaremos del siguiente lema.

Lema 2.2 *Si f es una función continua en I, entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es homeomorfo a $\varprojlim \boldsymbol{f^n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.
Haciendo $n_1 = 1, n_2 = n+1, n_3 = 2n+1, \ldots$, tenemos que $f_{n_i\, n_{i+1}} = f_{(i-1)n+1\; in+1} = f^n$, así por el Teorema 2.7, $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es homeomorfo a $\varprojlim \boldsymbol{f^n}$.
□

Denotemos por p_1 y p_2 a las funciones $p_1 : I \times I \to I$, $p_2 : I \times I \to I$ definidas por $p_1((x,y)) = x$ y $p_2((x,y)) = y$ para cada $(x,y) \in I \times I$.

Ejemplo **2.6** *Si f es la función del Ejemplo 2.5, entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es homeomorfo a la cerradura de la gráfica de la función $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ para $x \in (0,1]$.*

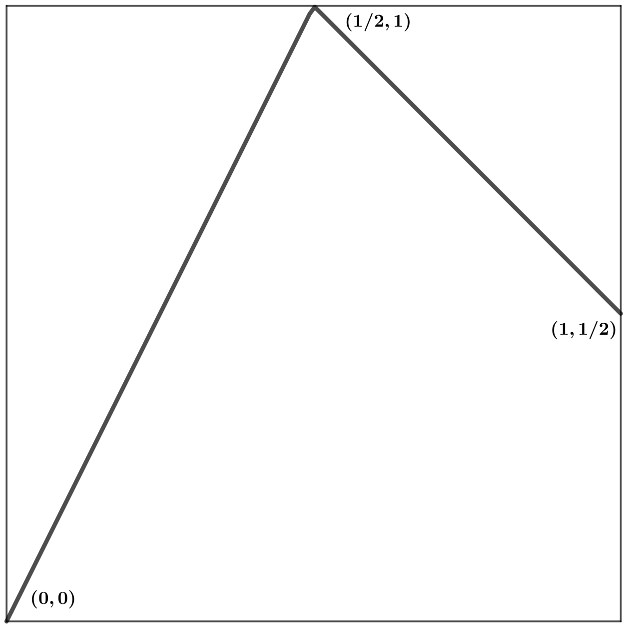


Figura 2.4: Función cuyo límite inverso es homeomorfo a la cerradura de la gráfica $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$

Demostración.
Notemos que $f \circ f$ es unión de los siguientes tres homeomorfismos:

$$g_1 : \left[0, \frac{1}{4}\right] \to [0,1] \text{ definida por } g_1(x) = 4x.$$
$$g_2 : \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ definida por } g_2(x) = \frac{3}{2} - 2x.$$
$$g_3 : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ definida por } g_3(x) = x.$$

Sea g la función continua cuya gráfica es unión de los homeomorfismos g_1, g_2 y g_3, denotemos por $\operatorname{Gr}(\operatorname{sen}(\frac{1}{x}))$ a la gráfica de la función $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ para $x \in (0,1]$, para ver que $\varprojlim \boldsymbol{g}$ y $\operatorname{Cl}(\operatorname{Gr}(\operatorname{sen}(\frac{1}{x})))$ son homeomorfos descompondremos a la gráfica de la función $\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ en arcos y construiremos un homeomorfismo h entre los arcos del límite inverso de g con los de $\operatorname{Gr}(\operatorname{sen}(\frac{1}{x}))$.

La definición de $\boldsymbol{h}$ (Ver Figura 2.6).
Para la definición de h usaremos dos homeomorfismos, φ y ψ. Sea $\varphi : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ el homeomorfismo lineal tal que $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ y $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$.

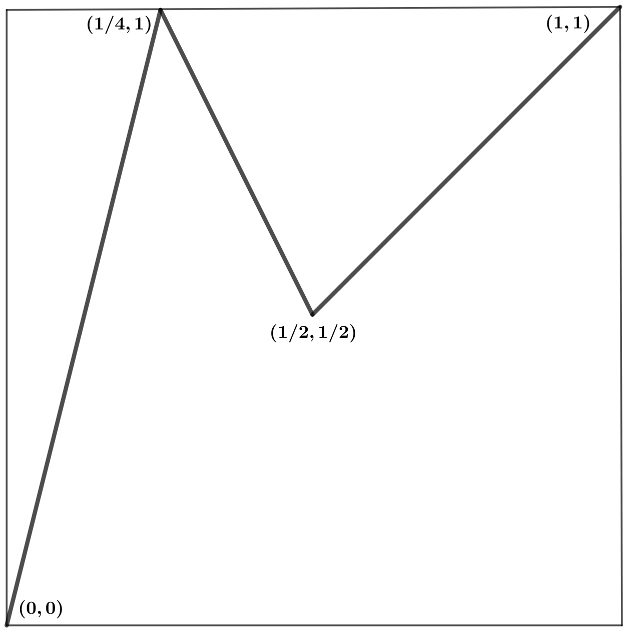


Figura 2.5: Gráfica de $f \circ f$

Sea $\psi : \left[0, \frac{1}{4}\right] \to \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ el homeomorfismo lineal tal que $\psi(0) = 1$ y $\psi\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.
Como g es sobreyectiva, $\pi_1(\varprojlim \boldsymbol{g}) = I$. Así existe $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{g}$ tal que $\pi_1(\boldsymbol{x}) \in I$. Analicemos varios casos:

i) Si $x_i \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ para toda $i > 0$, definamos

$$h(\boldsymbol{x}) = (0, \operatorname{sen}(\varphi(x_1))).$$

Ya que $-1 \leq \operatorname{sen}(\varphi(x_1)) \leq 1$, $h(\boldsymbol{x}) \in \{0\} \times [-1, 1]$.

ii) Si $x_1 \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ definamos

$$h(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\psi(x_1)}, \operatorname{sen}(\psi(x_1)\right).$$

Como $\frac{2}{\pi} < \frac{1}{\psi(x_1)} \leq 1$ y $\operatorname{sen}(1) \leq \operatorname{sen}(\psi(x_1)) < 1$,

$$h(\boldsymbol{x}) \in \left(\frac{2}{\pi}, 1\right] \times [0, 1) \cap \operatorname{Gr}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

iii) Si $x_1 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ definamos

$$h(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\pi - \varphi(f(x_1))}, \sin(\varphi(f(x_1)))\right).$$

Como
$$\frac{2}{3\pi} < \frac{1}{\pi - \varphi(f(x_1))} \leq \frac{2}{\pi}$$
y
$$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) < \operatorname{sen}(\pi - \varphi(f(x_1))) = \operatorname{sen}(\varphi(f(x_1))) \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
se tiene que $h(\boldsymbol{x}) \in \big(\big(\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi}\big] \times (-1,1]\big) \cap \operatorname{Gr}\big(\operatorname{sen}\big(\frac{1}{x}\big)\big)$.

Recordemos que $\operatorname{sen}\big(\frac{1}{x}\big) = 1$ si y sólo si $x = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ y $\operatorname{sen}\big(\frac{1}{x}\big) = -1$ si y sólo si $x = \frac{2}{(4n-1)\pi}$ para todo entero $n \geq 0$ y observemos que si $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{g}$ y no es de la forma que en $i)$ entonces existe un entero $j \geq 1$ tal que $x_j \in \big[\frac{1}{2}, 1\big]$ pero $x_{j+1} \notin \big[\frac{1}{2}, 1\big]$; hay dos casos para x_{j+1}:

a) Si $x_{j+1} \in \big[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\big)$ definamos
$$h(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{2\pi j + \varphi(f(x_{j+1}))}, \operatorname{sen}(\varphi(f(x_{j+1})))\right).$$
Observemos que $p_1(h(\boldsymbol{x})) \in \big(\frac{2}{(4j+1)\pi}, \frac{2}{(4j-1)\pi}\big]$ y $\operatorname{sen}(\varphi(f(x_{j+1}))) \in [-1,1)$. Por tanto
$$h(\boldsymbol{x}) \in \left(\left(\frac{2}{(4j+1)\pi}, \frac{2}{(4j-1)\pi}\right] \times [-1,1)\right) \cap \operatorname{Gr}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

b) Si $x_{j+1} \in \big[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\big)$ definamos
$$h(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{(2j+1)\pi - \varphi(f(x_{j+1}))}, \operatorname{sen}(\varphi(f(x_{j+1})))\right).$$
Observemos que $p_1(h(\boldsymbol{x})) \in \big(\frac{2}{(4j+3)\pi}, \frac{2}{(4j+1)\pi}\big]$ y $\operatorname{sen}(\varphi(f(x_{j+1}))) \in (-1,1]$. Por tanto
$$h(\boldsymbol{x}) \in \left(\left(\frac{2}{(4j+3)\pi}, \frac{2}{(4j+1)\pi}\right] \times (-1,1]\right) \cap \operatorname{Gr}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

En cualquiera de los casos anteriores $h(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Cl}\big(\operatorname{Gr}\big(\operatorname{sen}\big(\frac{1}{x}\big)\big)\big)$ y como cada componente involucrada en la definición de h esta bien definida, h esta bien definida.

***h* es continua**.
Sea $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{g}$, consideraremos dos casos:

1) Existe un entero positivo i tal que $x_i \notin \big[\frac{1}{2}, 1\big]$.

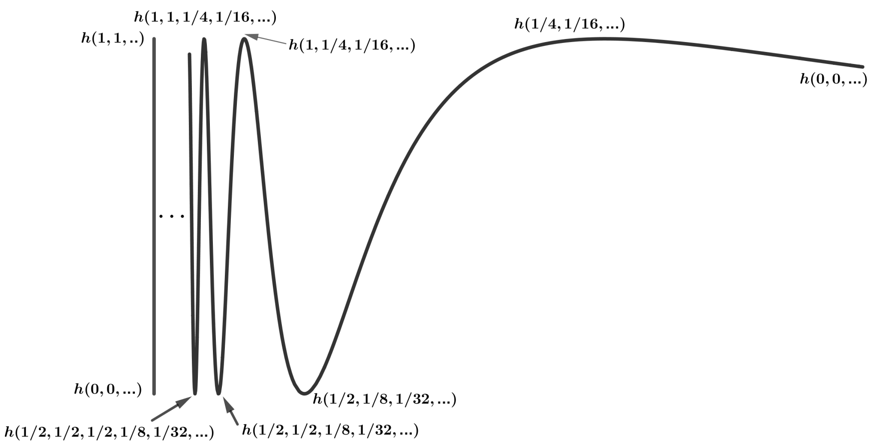


Figura 2.6: Algunos valores del homeomorfismo h.

2) Para cada entero positivo i, $x_i \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

1) Sea $\boldsymbol{x} \in \varprojlim \boldsymbol{g}$. Si $x_1 < \frac{1}{2}$ y $x_1 \neq \frac{1}{4}$, la continuidad de h en $\boldsymbol{x}$ se sigue de que en los casos *ii)* y *iii)* $p_1 \circ h$ y $p_2 \circ h$ son continuas por lo cual h es continua en $\boldsymbol{x}$. Si $x_1 = \frac{1}{4}$ entonces $h(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{2}{\pi}, 1\right)$, sólo basta en fijarnos en los puntos $\boldsymbol{z}$ tales que $z_1 < \frac{1}{4}$, así $h(\boldsymbol{z}) = \left(\frac{1}{\psi(z_1)}, \operatorname{sen}(\psi(z_1))\right)$. Notemos que si $z_1 \to \frac{1}{4}$ entonces $\psi(z_1) \to \frac{\pi}{2}$, por lo cual $h(\boldsymbol{z}) \to \left(\frac{2}{\pi}, 1\right)$. Por lo tanto h es continua en $\boldsymbol{x}$ cuando $x_1 \in [0, \frac{1}{2})$.

Similarmente, de la definición de h y de la continuidad de las funciones involucradas se tiene que h es continua en $\boldsymbol{x}$ si $\frac{1}{2} < x_j \leq 1$ y $\frac{1}{8} < x_{j+1} \leq \frac{1}{4}$ o $\frac{1}{4} < x_{j+1} \leq \frac{1}{2}$ para cada entero i.

Supongamos que j es un entero positivo tal que $x_i = \frac{1}{2}$ para $1 \leq i \leq j$ y $x_{j+1} = \frac{1}{8}$. Entonces, $h(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{2}{(4j-1)\pi}, -1\right)$. Si $\boldsymbol{z} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$ y $\frac{1}{16} \leq z_{j+1} < \frac{1}{8}$ entonces $z_j \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y $z_{j-1} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Así

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{z}) &= \left(\frac{1}{(2(j-1)+1)\pi - \varphi(f(x_{(j-1)+1}))}, \operatorname{sen}(\varphi(f(x_{(j-1)+1})))\right) \\ &= \left(\frac{1}{(2j-1)\pi - \varphi(f(z_j))}, \operatorname{sen}(\varphi(f(z_j)))\right). \end{aligned}$$

Como $\varphi(f(t)) \to -\frac{\pi}{2}$ cuando $t \to \frac{1}{8}$ se tiene que h es continua en $\boldsymbol{x}$.

Supongamos que j es un entero positivo tal que $x_i = 1$ para $1 \leq i \leq j$ y $x_{j+1} = \frac{1}{4}$. Entonces, $h(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{(4j+1)\pi}, 1\right)$, la continuidad de h en $\boldsymbol{x}$ proviene del hecho que si $\boldsymbol{z} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$ y $z_{j+1} \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$ entonces $h(\boldsymbol{z}) =$

$\left(\frac{1}{2j\pi+\varphi(f(z_{j+1}))}, \operatorname{sen}(\varphi(f(z_{j+1})))\right)$. Si $t \to \frac{1}{4}$ entonces $\varphi(f(t)) \to \frac{\pi}{2}$. Se sigue que h es continua en $\boldsymbol{x}$. Lo cual concluye la prueba que h es continua en el primer caso.

2) Supongamos que $\boldsymbol{x^1}, \boldsymbol{x^2}, \boldsymbol{x^3}, \ldots$ es una sucesión de puntos en $\varprojlim \boldsymbol{f}$ que converge a $\boldsymbol{x}$, por la continuidad de las funciones involucradas en h únicamente debemos de considerar el caso en que para cada n existe un entero j_n tal que $x^n_{j_n} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y $x^n_{j_{n+1}} \notin \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, es decir los casos $a)$ y $b)$. La continuidad de la función h en $\boldsymbol{x}$ se sigue de que si $n \to \infty$ entonces $j_n \to \infty$ y $x^n_1 \to x_1$, lo cual implica que $f(x^n_1) \to f(x_1) = x_1$. Por tanto, $\operatorname{sen}(\varphi(f(x^n_1))) \to \operatorname{sen}(\varphi(x_1))$ cuando $n \to \infty$. Por $a)$ y $b)$ $p_1(h(\boldsymbol{x^n})) \in \left(\frac{2}{(4j_n+3)\pi}, \frac{2}{(4j_n-1)\pi}\right]$ así $p_1(h(\boldsymbol{x})) \to 0$ cuando $j_n \to \infty$. Por lo tanto, la sucesión de puntos $h(\boldsymbol{x^1}), h(\boldsymbol{x^2}), \ldots$ converge a $h(\boldsymbol{x}) = (0, \operatorname{sen}(\varphi(x_1)))$, en consecuencia h es continua en el punto $\boldsymbol{x}$.

$\boldsymbol{h}$ es invectiva.
Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \varprojlim \boldsymbol{h}$ tales que $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, para $\boldsymbol{x}$ consideraremos los siguientes casos:
1) Para cada entero positivo i, $x_i \in [\frac{1}{2}, 1]$.
2) Hay un entero positivo j tal que $x_j \in [\frac{1}{2}, 1]$ pero $x_{j+1} \notin [\frac{1}{2}, 1]$.
3) Para cada entero positivo i, $x_i \in [0, \frac{1}{2})$.

1) Como $x_i \in [\frac{1}{2}, 1]$ para toda i por $i)$ $p_1(h(\boldsymbol{x})) = 0$, dado que $x_1 \neq y_1$ si $y_i \in [\frac{1}{2}, 1]$ para cada entero i entonces $p_2(h(\boldsymbol{x})) \neq p_2(h(\boldsymbol{y}))$. Por lo que $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$. Por $ii)$ y $iii)$ si $y_1 \in [0, \frac{1}{2})$, entonces $p_1(h(\boldsymbol{y})) \neq 0$, por ello $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$. Finalmente, si existe j tal que $x_j \in [\frac{1}{2}, 1]$ pero $x_{j+1} \notin [0, \frac{1}{2})$, por $a)$ y $b)$, se tiene que $p_1(h(\boldsymbol{y})) > \frac{2}{((4j+3)\pi)}$ y así $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$.

2) Por $a)$ y $b)$ tenemos que

$$p_1(h(\boldsymbol{x})) \in \left(\frac{2}{(4j+3)\pi}, \frac{2}{(4j-1)\pi}\right].$$

Si $y_i \in [\frac{1}{2}, 1]$ para cada i por $i)$, $p_1(h(\boldsymbol{y})) = 0$, por lo que $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$. Si $y_1 \in [0, \frac{1}{2})$, por $ii)$ y $iii)$ $p_1(h(\boldsymbol{y})) > \frac{2}{3\pi}$, como $j > 0$ se tiene que $\frac{2}{(4j-1)\pi} \leq \frac{2}{3\pi}$, por tanto $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$. Si existe un entero k tal que $y_k \in [\frac{1}{2}, 1]$ pero $y_{k+1} \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, entonces

$$p_1(h(\boldsymbol{y})) \in \left(\frac{2}{(4k+1)\pi}, \frac{2}{(4k-1)\pi}\right]$$

para este caso hay dos posibilidades:

- •) Si $j \neq k$ entonces $\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}, \frac{2}{(4k-1)\pi}\right] \cap \left(\frac{2}{(4j+3)\pi}, \frac{2}{(4j-1)\pi}\right] = \emptyset$ y así $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$.

- ••) Si $j = k$ entonces $x_{j+1} \neq y_{j+1}$ ya que de no ser así por definición de f, $x_i = y_i$ para toda i, lo cual no es posible y por tanto $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$.

Si $y_k \in [\frac{1}{2}, 1]$ pero $y_{k+1} \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ entonces $p_1(h(\boldsymbol{y})) \in \left(\frac{2}{(4k+3)\pi}, \frac{2}{(4k+1)\pi}\right)$, nuevamente tenemos dos casos:

- •) Si $j \neq k$ entonces $\left(\frac{2}{(4k+3)\pi}, \frac{2}{(4k+1)\pi}\right] \cap \left(\frac{2}{(4j+3)\pi}, \frac{2}{(4j-1)\pi}\right] = \emptyset$, por lo que $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$.

- ••) Si $i = k$ entonces $x_{j+1} \neq y_{j+1}$, por lo que $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$.

3) Por *ii*) y *iii*) tenemos que $p_1(h(\boldsymbol{x})) \in (\frac{2}{3\pi}, 1]$. Si hay un entero positivo i tal que $y_i \in [\frac{1}{2}, 1]$ pero $y_{i+1} \in [0, \frac{1}{2})$ entonces $p_1(h(\boldsymbol{y})) \leq \frac{2}{(4i-1)\pi}$ para $i > 0$, por lo que $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$. Si $y_i \in [\frac{1}{2}, 1]$ para todo i entonces $p_1(\boldsymbol{y}) = 0$ por lo que $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$. Si $x_1 \in [0, \frac{1}{4})$ y $y_1 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ o viceversa entonces $p_1(h(\boldsymbol{x})) \neq p_1(h(\boldsymbol{y}))$ por lo tanto $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$. Si $x_1, y_1 \in [0, \frac{1}{4})$ entonces $x_1 \neq y_1$, de lo contrario $\boldsymbol{x} = (x_1, \frac{x_1}{4}, \frac{x_1}{4^2}, \ldots) = \boldsymbol{y}$ lo cual no es posible por tanto $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$. Si $x_1, y_1 \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ entonces $x_1 \neq y_1$ pues de lo contrario $\boldsymbol{x} = (x_1, \frac{x_1}{4}, \frac{x_1}{4^2}, \ldots) = \boldsymbol{y}$. Por lo tanto $h(\boldsymbol{x}) \neq h(\boldsymbol{y})$.

***h* es sobreyectiva**.
Por el Teorema 2.5, $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un continuo y ya que h es continua $h(\varprojlim \boldsymbol{f})$ es un continuo. Como

$$h(1, 1, \ldots) = (0, 1) \in h(\varprojlim \boldsymbol{f}) \text{ y } h(0, 0, \ldots) = (1, \operatorname{sen}(1)) \in h(\varprojlim \boldsymbol{f}),$$

en consecuencia $h(\varprojlim \boldsymbol{f})$ es un continuo que contiene a los puntos $(0, 1)$ y $(1, \operatorname{sen}(1))$. En el Ejemplo 1.7 vimos que $\mathrm{Cl}(\mathrm{Gr}(\operatorname{sen}(\frac{1}{x})))$ es irreducible entre los puntos $(0, 0)$ y $(1, \operatorname{sen}(1))$ lo cual implica que $h(\varprojlim \boldsymbol{f}) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Gr}(\operatorname{sen}(\frac{1}{x})))$.

De lo anterior tenemos que h es una función continua y biyectiva definida en un espacio compacto, por lo que h es un homeomorfismo. □

El continuo dado en el siguiente ejemplo es homeomorfo al continuo conocido como arcoíris de Knaster, en este trabajo solo mostraremos que es indescomponible.

Ejemplo **2.7** *Sea $f : I \to I$ la función continua definida como $f(x) = 2x$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ y si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ $f(x) = 2(1 - x)$. Entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es un continuo indescomponible* (Ver Figura *2.7*).

Demostración.
Supongamos que $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es unión de dos subcontinuos propios no vacíos H y K. Si $\pi_i(H) = I$ para cada $i \in \mathbb{N}$, por el Teorema 2.6, $\varprojlim \boldsymbol{f} = H$ lo cual no es posible, así que para algún entero i, $\pi_i(H) \neq I$. Ademas observemos que si $k \geq i$, entonces $\pi_k(H) \neq I$.
De la misma forma vemos que existe un entero j tal que si $k \geq j$, entonces $\pi_k(K) \neq I$.
Sin perdida de generalidad supongamos que $i < j$, por ello $\pi_{j+1}(H)$ y $\pi_{j+1}(K)$ son distintos de I, pero como $\pi_{j+1}(H \cup K) = I$, $0 \in \pi_{j+1}(H)$ o $0 \in \pi_{j+1}(K)$.
Si $0 \in \pi_{j+1}(H)$ se tiene que $1 \notin \pi_{j+1}(H)$. Como $\pi_{j+1}(H)$ es conexo $\frac{1}{2} \notin \pi_{j+1}(H)$, de lo contrario $\pi_j(H) = I$. Entonces, $\{\frac{1}{2}, 1\} \subset \pi_{j+1}(K)$ lo cual implica que $\pi_j(K) = I$, esto es una contradicción.
Del mismo modo si $0 \in \pi_{j+1}(K)$, entonces $\{\frac{1}{2}, 1\} \subset \pi_{j+1}(H)$ lo cual nos lleva a una contradicción.

Por tanto $\varprojlim \boldsymbol{f}$ no es unión de dos subcontinuos propios y en consecuencia $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es indescomponible. $\square$

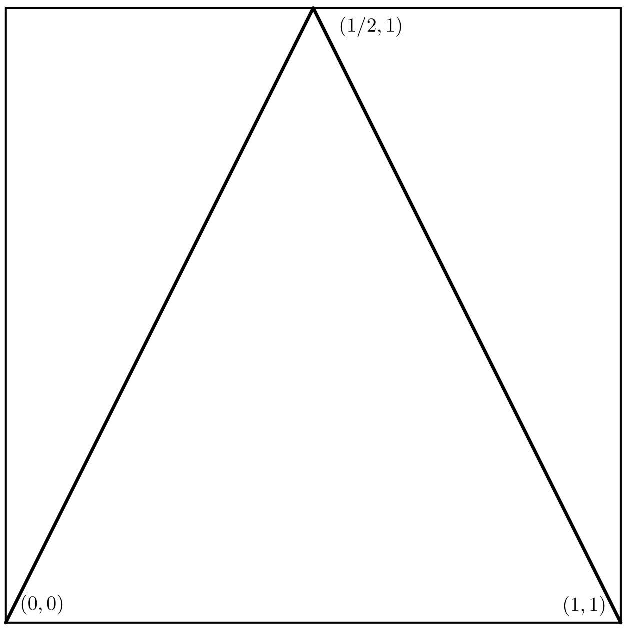


Figura 2.7: Gráfica de f cuyo límite inverso es el arcoíris de Knaster.

Capítulo 3

Caracterización de los continuos encadenables como límites inversos sobre $[0,1]$

Los ejemplos de la sección anterior son un caso particular de la clase de continuos llamados encadenables. En este capítulo veremos que para todo continuo encadenable existe una sucesión $\boldsymbol{f}$ de funciones continuas, lineales por partes cuyo límite inverso es homeomorfo a dicho continuo. Así obtendremos una generalización de los ejemplos anteriores. Para hacer esto comenzamos con una serie de definiciones y algunos teoremas que nos ayudarán a alcanzar nuestro objetivo.

Si (X,d) es un espacio métrico y $A \subseteq X$, definimos el diámetro de A como el supremo del $\{d(x,y) \,|\, x,y \in A\}$, si existe. El cual denotaremos por $\mathrm{diam}(A)$.

Definición 3.1 *Una cadena es una secuencia $\mathcal{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ de conjuntos abiertos tales que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$. A los conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les llamaremos eslabones de $\mathcal{C}$. Dado $\varepsilon > 0$, una cadena es una **ε-cadena** si el diámetro de cada eslabón de $\mathcal{C}$ es menor que ε. Un continuo M es encadenable siempre que para cada ε existe una ε-cadena cubriendo a M.*

Probaremos que un continuo no degenerado M es encadenable si y sólo si existe una sucesión $\boldsymbol{f}$ de funciones lineales por partes de $[0,1]$ a $[0,1]$ tal que M es homeomorfo a $\varprojlim \boldsymbol{f}$. Notemos que en la definición de $\mathcal{C}$ no especificamos en que espacio los eslabones son abiertos, sin embargo los eslabones los tomaremos como abiertos en algún espacio que contiene al continuo que cubren; en el caso de los límites inversos sobre $[0,1]$ el espacio que nos tomaremos sera $\mathbf{Q}$. La mayor parte de este capítulo cuando diremos que M es un continuo encadenable asumiremos que nuestro espacio es M y los eslabones son abiertos en M.

Teorema 3.1 *Si $\boldsymbol{f}$ es una sucesión de funciones continuas $f_i : [0,1] \to [0,1]$ con $i \in \mathbb{N}$, entonces $\varprojlim \boldsymbol{f}$ es encadenable.*

Demostración.
Dado $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n tal que

$$\frac{1}{2^n} = \sum_{i>n} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Para cada $i < n$, f_{in} es continua definida en I, por lo que f_{in} es uniformemente continua. Así, existe $\delta_i > 0$ tal que si $1 \leq i < n$ y $t, s \in I$ y si $|t-s| < \delta_i$ entonces $|f_{in}(s) - f_{in}(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$, sea $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}\}$. Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \varprojlim \boldsymbol{f}$ y $|x_n - y_n| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned}
d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sum_{i>0} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} + \frac{|x_n - y_n|}{2^n} + \sum_{i>n} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|f_{in}(x_n) - f_{in}(y_i)|}{2^i} + \frac{|x_n - y_n|}{2^n} + \sum_{i>n} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \\
&< \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{3(2^i)} + \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \frac{3\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Así, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $A \subseteq [0,1]$ y el diámetro de A es menor a δ entonces el diámetro de $\pi_n^{-1}(A)$ es menor que ε. Sea $\boldsymbol{D} = (D_1, D_2, \ldots, D_m)$ una $\delta-$cadena que cubre a $[0,1]$ y sea $C_i = \pi_n^{-1}(D_i)$ para $1 \leq i \leq m$, como $\pi_n^{-1}(I) = \varprojlim \boldsymbol{f}$ tenemos que la colección $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ cubre al $\varprojlim \boldsymbol{f}$ donde el diámetro de cada C_i es menor que ε, y

$$C_i \cap C_j = \pi_n^{-1}(D_i \cap D_j) \neq \emptyset \text{ si y sólo si } |i-j| = 1$$

por lo que $\boldsymbol{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_m)$ es una $\varepsilon-$cadena que cubre a $\varprojlim \boldsymbol{f}$. $\square$

Definición 3.2 *Una cadena es llamada tensa si* $\mathrm{Cl}(C_i) \cap \mathrm{Cl}(C_j) \neq \emptyset$ *para* $|i-j| \leq 1$.

Es mas complicado probar que todo continuo encadenable no degenerado es límite inverso de una función de $[0,1]$ en $[0,1]$ lineal a trozos. Para ello usaremos lo siguiente.

Lema 3.1 *Si M es un continuo encadenable. Para $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon-$cadena tensa $\mathcal{C}$ que cubre a M tal que cada eslabón de $\mathcal{C}$ es un abierto en M y contiene un punto de M que no está en la cerradura de ningún otro eslabón de $\mathcal{C}$.*

Demostración.
Sea $\mathcal{D} = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ una cadena que cubre al continuo M y donde cada eslabón de $\mathcal{D}$ intersecta a M. Podemos suponer que cada eslabón de $\mathcal{D}$ contiene un punto que no esta en ningún otro eslabón. En caso de no ser así hay varios casos a considerar, para D_1 tenemos que $D_1 \subseteq D_2$ o $D_2 \subseteq D_1$, supongamos que $D_1 \subseteq D_2$ entonces podemos omitir a D_1 de la cadena y obtener una cadena $\mathcal{D}' = (D_2, D_3, \ldots, D_n)$ que cubre a M y D_2 contiene un punto que no pertenece a D_3 ya que $D_1 \cap D_3 = \emptyset$, si $D_2 \subseteq D_1$ entonces $D_1 \cap D_3 \neq \emptyset$ lo cual no es posible. Para D_n se tiene que $D_n \subseteq D_{n-1}$ o $D_{n-1} \subseteq D_n$, si $D_n \subseteq D_{n-1}$, en este caso la cadena $\mathcal{D} = (D_1, D_2 \ldots, D_{n-1})$ cubre a M y como $D_n \cap D_{n-2} = \emptyset$ tenemos que existe un punto en D_{n-1} que no pertenece a la unión de los otros eslabóns, si $D_{n-1} \subseteq D_n$ entonces $D_n \cap D_{n-2} \neq \emptyset$ lo cual no es posible. Si existe $1 \leq i \leq n$ tal que D_i es subconjunto de alguno de los otros eslabonesen $\mathcal{D}$ entonces M es unión de dos conjuntos abiertos ajenos

$$D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_{i-1} \text{ y } D_{i+1} \cup D_{i+2} \cup \cdots \cup D_n$$

pues D_{i-1} y D_{i+1} no se intersectan, pero D_i intersecta a D_{i+1} y D_{i-1} lo cual es una contradicción, por ello el eslabón D_i contiene un punto que no pertenece a ningún otro eslabón de $\mathcal{D}$. Por tanto existe una cadena $\mathcal{D}$ que cubre a M y que cada eslabón en $\mathcal{D}$ contiene un punto que no esta en ningún otro eslabón.

Consideremos a $\mathcal{D} = (D_1, D_2, \ldots, D_m)$ una una $\frac{\varepsilon}{3}-$cadena que cubre a M tal que cada eslabón de $\mathcal{D}$ contiene un punto de M que no esta en ningún otro eslabón de $\mathcal{D}$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena definida como sigue:

i) Si m es par.
Sean $n = \frac{m}{2}$ consideremos a la cadena $\mathcal{C}$, donde si $1 \leq i < n$ entonces $C_i = (D_{2i-1} \cup D_{2i}) \cap M$ y $C_n = (D_{m-1} \cup D_m) \cap M$.

ii) Si m es impar.
Sea $n = \frac{m-1}{2}$ consideremos a la cadena $\mathcal{C}$, donde si $1 \leq i < n$ entonces $C_i = (D_{2i-1} \cup D_{2i}) \cap M$ y $C_n = (D_{m-2} \cup D_{m-1} \cup D_m) \cap M$.

En ambos casos, dado que $\mathcal{D}$ cubre a M, $\mathcal{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ cubre a M. Además si $1 \leq j$, $i < n$ con $|i - j| \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} C_i \cap C_j &= ((D_{2i-1} \cup D_{2i}) \cap M) \cap ((D_{2j-1} \cup D_{2j}) \cap M) \\ &= M \cap (D_{2i-1} \cap (D_{2j-1} \cup D_{2j}) \cup D_{2i} \cap (D_{2j-1} \cup D_{2j})) \end{aligned}$$

Si $j = i - 1$, entonces $D_{2i-1} \cap (D_{2j-1} \cup D_{2j}) \neq \emptyset$ o si $j = i + 1$ tenemos que $D_{2i} \cap (D_{2j-1} \cup D_{2j}) \neq \emptyset$ por lo que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$. Además, si m es par $C_{n-1} \cap C_n \neq \emptyset$ o si m es impar se tiene que $C_{n-1} \cap C_n \neq \emptyset$. En cualquier caso de la definición de $\mathcal{C}$, se tiene que $\mathcal{C}$ es una cadena que cubre a M.

Ahora veamos que $\mathcal{C}$ es una ε-cadena. Como los eslabones de $\mathcal{D}$ tienen diámetro menor a $\frac{\varepsilon}{3}$ se tiene lo siguiente

1) Si $1 \leq i < n$, entonces $\operatorname{diam}(C_i) = \operatorname{diam}(D_{2i-1} \cup D_{2i}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

2) Si m es par entonces $\operatorname{diam}(C_n) = \operatorname{diam}(D_{m-1} \cup D_m) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$

3) Si m es impar entonces $\operatorname{diam}(C_n) = \operatorname{diam}(D_{m-2} \cup D_{m-1} \cup D_m) < \frac{3\varepsilon}{3}$.

En cualquier caso $\mathcal{C}$ es una ε-cadena que cubre a M.

Resta demostrar que $\mathcal{C}$ es una cadena tensa. Sea x_1 el punto de D_1 que no está en D_2, al ser D_1 un abierto que no intersecta a $D_3 \cup D_4$ y que contiene a x_1, por definición $x_1 \notin \operatorname{Cl}(D_3 \cup D_4) = \operatorname{Cl}(C_2)$. Similarmente, sea $x_m \in D_m$ el punto que no está en D_{m-1} entonces x_m no está en C_{n-1} y $D_m \cap C_{n-1} = \emptyset$ por lo que $x_m \notin \operatorname{Cl}(C_{n-1})$. Para cada $1 < j < n$ el punto $x_j \in C_j$ tal que $x_j \in D_{2j} \cap D_{2j-1}$ es el punto que no está en $\operatorname{Cl}(C_{j-1})$ y $\operatorname{Cl}(C_{j+1})$, pues $D_{2j} \cap D_{2j-2} = \emptyset$ y $D_{2j-1} \cap D_{2j+1} = \emptyset$.
Así para cada $1 \leq i \leq n$ existe un punto en C_i que no está en la cerradura de ningún otro eslabón de $\mathcal{C}$.

Por último observemos que para cada $1 < j < n$

$$C_{j-1} \cap (D_{2j-1} \cap D_{2j}) \cap C_{j+1} = \emptyset,$$

lo cual implica que existe un abierto que no intersecta a C_{j-1} y a C_{j+1} y así

$$\operatorname{Cl}(C_{j-1}) \cap \operatorname{Cl}(C_{j+1}) = \emptyset.$$

Por lo tanto, $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ es una cadena tensa que cumple con las condiciones requeridas. $\square$

Si $\mathcal{G}$ es una colección de conjuntos entonces $\mathcal{G}^*$ denota la unión de todos los conjuntos de $\mathcal{G}$.

Definición 3.3 *Una cadena $\mathcal{D}$ se dice que refina a la cadena $\mathcal{C}$ siempre que cada eslabón de $\mathcal{D}$ es subconjunto de algún eslabón de $\mathcal{C}$. $\mathcal{D}$ refina fuertemente a $\mathcal{C}$ siempre que la cerradura de cada eslabón de $\mathcal{D}$ es subconjunto de algún eslabón de $\mathcal{C}$. La malla de una cadena es el diámetro mas grande de cada uno de sus eslabones.*

Para probar el siguiente teorema usaremos el lema comúnmente conocido como Lema del número de Lebesgue. Recordemos que para x un punto de un espacio métrico (X,d) y $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) = \{p \in X \mid d(x,p) < \varepsilon\}$.

Lema 3.2 (*Lema del número de Lebesgue*) *Si A es un subconjunto compacto de un espacio métrico y $\mathcal{G}$ es una colección de conjuntos abiertos cubriendo a A, entonces existe un número positivo ε tal que si $x \in A$ entonces $B(x,\varepsilon)$ es subconjunto de algún miembro de $\mathcal{G}$.*

Teorema 3.2 *Si M es un continuo encadenable, entonces existe una sucesión $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$, tal que para cada entero positivo n.*

1) *$\mathcal{C}_n$ es una cadena tensa cubriendo a M.*

2) *Cada eslabón de $\mathcal{C}_n$ es abierto en M y contiene un punto de M que no esta en la cerradura de ningún otro eslabón de $\mathcal{C}_n$.*

3) *La malla de $\mathcal{C}_n$ es menor que $\frac{1}{n}$.*

4) *$\mathcal{C}_{n+1}$ refina fuertemente a $\mathcal{C}_n$.*

5) *$M = \bigcap\limits_{n>0} \mathcal{C}_n^*$.*

Demostración.
Usando el Lema 3.1 obtenemos una $1-$cadena tensa $\mathcal{C}_1$ que cubre a M donde cada eslabón de $\mathcal{C}_1$ es abierto en M y cada eslabón contiene un punto de M que no esta en la cerradura de ningún otro eslabón de $\mathcal{C}_1$. Por el Lema del número de Lebesgue existe $0 < \delta_1 < \frac{1}{2}$ tal que si $x \in M$ entonces $B(x,\delta_1)$ es subconjunto de algún eslabón en $\mathcal{C}_1$, aplicando el lema 3.1, existe una δ_1-cadena tensa $\mathcal{C}_2 = (C_1^2, C_2^2, \ldots, C_{n_1}^2)$ que cubre a M tal que cada eslabón de $\mathcal{C}_2$ contiene un punto que no esta en la cerradura de otro eslabón de $\mathcal{C}_2$ y la malla de la cadena $\mathcal{C}_2$ es menor que $\frac{1}{2}$; para $1 \leq i \leq n_1$ si C_i^2 es un eslabón de $\mathcal{C}_2$ para todo $x \in C_i^2$ se tiene que $C_i^2 \subseteq B(x,\delta_1)$ y ya que $B(x,\delta_1)$ es subconjunto de algún eslabón de $\mathcal{C}_1$, se tiene que C_i^2 es subconjunto de algún eslabón de $\mathcal{C}_1$. Ya que el diámetro de $B(x,\delta_1)$ es $2\delta_1$ entonces existe un punto y tal que $y \in B(x,\delta_1) \setminus C_i^2$, al ser M un espacio métrico existe un abierto U en M tal que $y \in U$ y $U \cap C_i^2 = \emptyset$, por lo que y no es un punto de la cerradura de C_i^2 entonces

$\mathrm{Cl}(C_i^2) \subset B(x, \delta_1)$. Por lo tanto $\mathcal{C}_2$ es una δ_1-cadena tensa que cubre a M y que refina fuertemente a $\mathcal{C}_1$ cuya malla es menor a $\frac{1}{2}$.

Supongamos que $\mathcal{C}_k$ es una cadena que satisface $1), 2), 3)$ y 4), por el Lema del número de Lebesgue existe δ_k tal que para cada $x \in M$, $B(x, \delta_k)$ es subconjunto de algún eslabón de $\mathcal{C}_k$, como la malla de $\mathcal{C}_k$ es menor a $\frac{1}{k}$ entonces podemos suponer que $\delta_k < \frac{1}{k+1}$, aplicando el Lema 3.1 obtenemos una δ_k-cadena $\mathcal{C}_{k+1}$ que cubre al continuo M y que satisface las condiciones 1) y 2), supongamos que

$$\mathcal{C}_{k+1} = (C_1^{k+1}, C_2^{k+1}, \ldots, C_{n_{k+1}}^{k+1}).$$

Para $1 \leq i \leq n_{k+1}$ dado $x \in C_i^{k+1}$ se tiene que para cada $y \in C_i^{k+1}$, $d(x, y) < \delta_k$. Por lo que $y \in B(x, \delta_k)$. Así, $C_i^{k+1} \subset B(x, \delta_k)$, donde $B(x, \delta_k)$ es subconjunto de algún eslabón de $\mathcal{C}_k$.
Al ser M un espacio métrico existen $y \in B(x, \delta_k)$ y V un abierto tal que $y \in V$ y $V \cap C_{k+1_i} = \emptyset$. De esta manera $\mathrm{Cl}(C_i^{k+1}) \subseteq B(x, \delta_k)$ y en consecuencia $\mathcal{C}_{k+1}$ es una cadena tensa que refina fuertemente a $\mathcal{C}_k$ cuya malla es menor a $\frac{1}{k+1}$ y que satisface las condiciones 1) y 2).

Para cada $n \geq 1$, los eslabones en la cadena $\mathcal{C}_n$ son abiertos en M por lo que $\mathcal{C}_n^* \subseteq M$. Por otra parte si $x \in M$, ya que $\mathcal{C}_n$ es cubierta se tiene que $x \in \mathcal{C}_n$ para cada $n \geq 1$, por ello $x \in \bigcap_{n>0} \mathcal{C}_n^*$. Por lo tanto $\bigcap_{n>0} \mathcal{C}_n^* = M$. □

Si M es un continuo encadenable, una sucesión de cadenas que satisfacen las conclusiones del Teorema 3.2, es llamada sucesión definitiva para M (aún si los eslabones de las cadenas son abiertos en el espacio que contiene a M). El siguiente lema es bastante técnico pero lo usaremos para construir funciones de ligadura con un límite inverso homeomorfo a M.

Lema 3.3 *Sean $\mathcal{C} = (C_1, C_2, \ldots, C_n)$ y $\mathcal{D} = (D_1, D_2, \ldots, D_m)$ cadenas tensas tales que $\mathcal{D}$ refina fuertemente a $\mathcal{C}$ y $\delta > 0$. Supongamos además que hay puntos $p \in C_1$ y $q \in C_n$ y un número positivo σ tal que $d(Cl(C_i), Cl(C_j)) > \sigma$ si $|i - j| > 1$, $d(p, Cl(C_i)) > \sigma$ si $i \neq 1$ y $d(q, Cl(C_i)) > \sigma$ si $i \neq n$. Si la malla de $\mathcal{D}$ es menor que $\frac{n\sigma\delta}{2}$ y $p, q \in \mathcal{D}^*$, entonces existe una función lineal por partes sobreyectiva $f : [0, 1] \to [0, 1]$ que no es constante en ningún subintervalo de $[0, 1]$ y*

1) *Si $1 \leq j \leq m$, hay un entero positivo i, $1 \leq i \leq n$, tal que $f\left(\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]\right) \subseteq \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$.*

2) *Si* $1 \leq j < m$, *y* $f\left(\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]\right) \subseteq \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ *cuando* $1 \leq i \leq n$ *entonces* $Cl(D_j) \subseteq C_i$.

3) *Si* $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, $Cl(D_j) \subseteq C_i$ *y* l *es un entero positivo tal que* $D_l \cap D_j \neq \emptyset$ *entonces* $f\left(\left[\frac{l-1}{m}, \frac{l}{m}\right]\right) \subseteq \left[\frac{i-2}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$.

4) *Si* $i \leq j \leq m$ *y* s, t *son puntos de* $\left[\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m}\right]$ *entonces* $|f(s) - f(t)| < \delta$.

Demostración.
Tomemos una partición de la cadena $\mathcal{D}$ en subcadenas, cada una pertenece a un único eslabón de $\mathcal{C}$ (Ver Figura 3.1 donde hay 17 subcadenas de la partición). Entonces, la función f es definida basada en el comportamiento de la elección de la partición dentro de la cadena $\mathcal{C}$ (Ver Cuadro 3.1, y Figura 3.2 para una descripción de la gráfica de la función f basado en la Figura 3.1). La definición de f es dada en varias partes. Primero el dominio $[0,1]$ se divide en intervalos cada uno de longitud $\frac{1}{m}$, así tenemos un subintervalo para cada eslabón de $\mathcal{D}$. Similarmente el rango del intervalo $[0,1]$ se divide en intervalos cada uno de longitud $\frac{1}{n}$, uno para cada eslabón de la cadena $\mathcal{C}$. Nuestra meta en definir f es imitar las incrustaciones de los eslabones de $\mathcal{D}$ en los eslabones de $\mathcal{C}$, de tal forma que f mande subintervalos del dominio a subintervalos del rango. Inicialmente la función es únicamente definida en puntos de la subdivisión que son determinados por números de los eslabones de los elementos de la partición de $\mathcal{D}$. Los valores de la función en esos puntos son determinados por la forma en que $\mathcal{D}$ refina a $\mathcal{C}$ y la dirección en que la cadena $\mathcal{D}$ se "mueve" en $\mathcal{C}$. Después, la función será extendida linealmente a todo el intervalo y probaremos que es sobreyectiva.

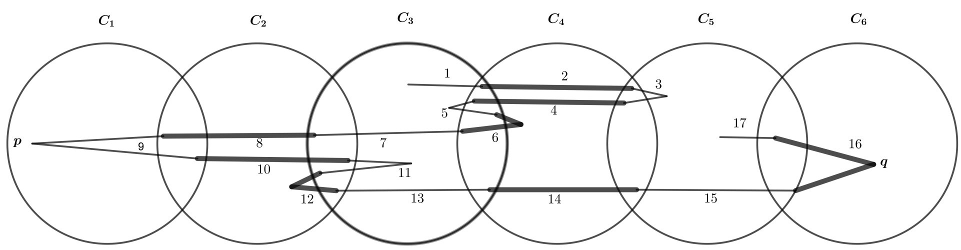


Figura 3.1: Una representación de la cadena $\mathcal{D}$ y su partición que refina a la cadena $\mathcal{C}$.

Partición de $\mathcal{D}$

Para $D_1 \in \mathcal{D}$ existe C_{l_1} tal que $D_1 \subseteq C_{l_1}$ para algún $1 \leq l_1 \leq n$ y al ser $\mathcal{D}$ un refinamiento de $\mathcal{C}$ existe D_s tal que $D_{s-1} \subseteq C_{l_1}$ y D_s no es

subconjunto de C_{l_1}, sea $s_1 > 1$ el menor entero tal que $D_{s_1-1} \subseteq C_{l_1}$ y D_{s_1} no es subconjunto de C_{l_1}. Sea $\mathcal{B}_1 = (D_1, D_2, \ldots, D_{s_1-1})$ la subcadena tal que $\mathcal{B}_1^* \subseteq C_{l_1}$ y como $\mathcal{D}$ refina fuertemente a $\mathcal{C}$ entonces $\mathrm{Cl}(\mathcal{B}_1^*) \subseteq C_{l_1}$. Notemos que D_{s_1} es subconjunto de C_{l_2} donde $|l_1 - l_2| = 1$.
Sea s_2 el menor entero mayor a s_1 tal que $D_{s_2-1} \subseteq C_{l_2}$ y D_{s_2} no es subconjunto de C_{l_2}. Sea $\mathcal{B}_2 = (D_{s_1}, D_{s_1+1}, \ldots, D_{s_2-1})$ la subcadena de C_{l_2} tal que $\mathcal{B}_2^* \subseteq C_{l_2}$ y ya que $\mathcal{D}$ refina fuertemente a $\mathcal{C}$ tenemos que $\mathrm{Cl}(\mathcal{B}_2^*) \subseteq C_{l_2}$.
Continuando de esta manera obtenemos subcadenas $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_k$, tales que si $1 \leq j \leq k$ existe un entero i_j, $1 \leq i_j \leq n$ tal que $\mathrm{Cl}(\mathcal{B}_j^*) \subseteq C_{i_j}$ y $|i_{j+1} - i_j| = 1$.

Para cada $1 \leq j \leq k$, h_j denotará el número de eslabones de $\mathcal{B}_j$ y

$$m_j = h_1 + h_2 + \cdots + h_j.$$

Ya que $d(\mathrm{Cl}(C_i), \mathrm{Cl}(C_j)) > \sigma$ si $|i - j| > 1$, $d(p, \mathrm{Cl}(C_i)) > \sigma$ si $i \neq 1$ y $d(q, \mathrm{Cl}(C_i)) > \sigma$ si $i \neq n$ se tiene que la malla de C es mayor que σ por lo que se necesitan al menos

$$\frac{\sigma}{(n\sigma\delta)/2} = \frac{2}{n\delta}$$

eslabones de una subcadena de $\mathcal{D}$ para que cruce un eslabón de $\mathcal{C}$ o para ir del punto p (respectivamente q) a un eslabón de $\mathcal{C}$ que no contiene al punto p (respectivamente q). Así, si $\mathcal{B}_j^*$ intersecta a C_{i_j-1} y C_{i_j+1} o $p \in \mathcal{B}_j^*$ o $q \in B_j^*$ entonces $h_j > \frac{2}{n\delta}$.

Definición de la función f en $\frac{m_j}{m}$ para $1 \leq j \leq k$.
Para $1 \leq j \leq k$, sea

$$f\left(\frac{m_j}{m}\right) = \begin{cases} \frac{i_j}{n} & \text{si} \quad i_j < i_{j+1}, \\ \\ \frac{i_j - 1}{n} & \text{si} \quad i_{j+1} < i_j. \end{cases}$$

Como vimos en la construcción de las subcadenas para cada $1 \leq j \leq k$ existe un entero i_j tal que $\mathrm{Cl}(\mathcal{B}_j^*) \subseteq C_{i_j}$, para la subcadena $\mathcal{B}_{j+1}$ se tiene que $\mathrm{Cl}(\mathcal{B}_{j+1}^*) \subseteq C_{i_{j+1}}$ donde $i_{j+1} > i_j$ o $i_{i+1} < i_j$ pero no ambos. De esto se tiene que f está bien definida.

Extenderemos f a $[0, 1]$. Consideraremos los siguientes cuatro casos:

Caso i) Extensión de f a $[\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{m_j}{m}]$ para $i < j < k$ cuando $f(\frac{m_{j-1}}{m}) \neq f(\frac{m_j}{m})$.

Supongamos que $1 < j < k$ y $f(\frac{m_{j-1}}{m}) \neq f(\frac{m_j}{m})$. Extenderemos a f linealmente en $[\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{m_j}{m}]$ de la siguiente manera.
Si $i_{j-1} < i_j$ entonces $f(\frac{m_{j-1}}{m}) = \frac{i_{j-1}}{n}$. Como $i_j - i_{j-1} = 1$, se tiene que $\frac{i_{j-1}}{n} = \frac{i_j-1}{n}$. Para i_j hay dos casos:

$$i_j < i_{j+1} \text{ o } i_j > i_{j+1},$$

entonces

$$f\left(\frac{m_j}{m}\right) = \frac{i_j}{n} \text{ o } f\left(\frac{m_j}{m}\right) = \frac{i_j-1}{n}$$

respectivamente, y ya que $f(\frac{m_{j-1}}{m}) \neq f(\frac{m_j}{m})$ tenemos que

$$f\left(\frac{m_{j-1}}{m}\right) = \frac{i_{j-1}}{n} \text{ y } f\left(\frac{m_j}{m}\right) = \frac{i_j}{n}.$$

Si $i_{j-1} > i_j$, entonces $f(\frac{m_{j-1}}{m}) = \frac{i_{j-1}-1}{n}$ y ya que $i_{j-1} - i_j = 1$ se tiene que $f(\frac{m_{j-1}}{m}) = \frac{i_{j-1}-1}{n} = \frac{i_j}{n}$. De nuevo para i_j hay dos casos:

$$i_j < i_{j+1} \text{ o } i_j > i_{j+1}$$

de aquí

$$f\left(\frac{m_j}{m}\right) = \frac{i_j}{n} \text{ o } f\left(\frac{m_j}{m}\right) = \frac{i_j-1}{n}$$

respectivamente, como $f(\frac{m_{j-1}}{m}) \neq f(\frac{m_j}{m})$ tenemos que

$$f\left(\frac{m_{j-1}}{m}\right) = \frac{i_{j-1}-1}{n} \text{ y } f\left(\frac{m_j}{m}\right) = \frac{i_j-1}{n}.$$

En cualquiera de los dos casos definimos f en $[\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{m_j}{m}]$ como la semirecta que une a los puntos $(\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{i_{j-1}}{n})$ y $(\frac{m_j}{m}, \frac{i_j}{n})$ o a los puntos $(\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{i_{j-1}-1}{n})$ y $(\frac{m_j}{m}, \frac{i_j-1}{n})$. En ambos casos tenemos que $f([\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{m_j}{m}]) = [\frac{i_j-1}{n}, \frac{i_j}{n}]$.
Si $m_{j-1} < l \leq m_j$ de la linealidad de f en $[\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{m_j}{m}]$ tenemos que $f([\frac{l-1}{m}, \frac{l}{m}]) \subseteq [\frac{i_j-1}{n}, \frac{i_j}{n}]$ y $\mathrm{Cl}(D_l) \subseteq C_{i_j}$. Además, notemos que la pendiente de f en $[\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{m_j}{m}]$ está dada por

$$\left|\frac{m(i_j - (i_i - 1))}{n(m_j - m_{j-1})}\right| = \left|\frac{m}{n(m_j - m_{j-1})}\right|,$$

ya que

$$i_{j-1} < i_j < i_{j+1} \text{ o } i_{j-1} > i_j > i_{j+1}$$

se tiene $h_j > \frac{2}{n\delta}$, en consecuencia

$$\left|\frac{m}{n(m_j - m_{j-1})}\right| = \left|\frac{m}{nh_j}\right| < \frac{m\delta}{2}.$$

Si $s, t \in [\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{m_j}{m}]$ y $|s-t| < \frac{1}{m}$ entonces $|f(s) - f(t)| = |a(s-t)|$ donde a representa la pendiente, por lo que

$$|a(s-t)| < \frac{m\delta}{2m} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Caso ii) Extensión de f a $\left[\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{m_j}{m}\right]$ para $i < j < k$ cuando $f\left(\frac{m_{j-1}}{m}\right) = f\left(\frac{m_j}{m}\right)$.

Supongamos que $1 < j < k$ y $f(\frac{m_{j-1}}{m}) = f(\frac{m_j}{m})$. Sea r_j el punto medio del intervalo $[\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{m_j}{m}]$. En el caso anterior vimos que

$$f\left(\tfrac{m_{j-1}}{m}\right) = f\left(\tfrac{m_j}{m}\right) = \tfrac{i_{j-1}}{n} = \tfrac{i_j - 1}{n},$$

cuando $i_{j-1} < i_j$ y $i_j > i_{j+1}$. También

$$f\left(\tfrac{m_{j-1}}{m}\right) = f\left(\tfrac{m_j}{m}\right) = \tfrac{i_j}{n} = \tfrac{i_{j-1}-1}{n},$$

cuando $i_{j-1} > i_j$ y $i_j < i_{j+1}$.
Supongamos que $i_j > i_{j-1}$ y $i_j > i_{j+1}$. Si $h_j > \frac{2}{n\delta}$ hacemos

$$f(r_j) = \tfrac{i_j}{n}.$$

Si $h_j \leq \frac{2}{n\delta}$ hacemos

$$f(r_j) = \tfrac{i_j - 1}{n} + \tfrac{h_j\delta}{2}.$$

En este caso

$$f(r_j) = \tfrac{i_j - 1}{n} + \tfrac{h_j\delta}{2} \leq \tfrac{i_j - 1}{n} + \tfrac{1}{n} = \tfrac{i_j}{n}.$$

Supongamos que $i_j < i_{j-1}$ y $i_j < i_{j+1}$. Si $h_j > \frac{2}{n\delta}$ hacemos

$$f(r_j) = \tfrac{i_j - 1}{n}.$$

Si $h_j \leq \frac{2}{n\delta}$ hacemos

$$f(r_j) = \tfrac{i_j}{n} - \tfrac{h_j\delta}{2},$$

así $f(r_j) \geq \frac{i_j-1}{n}$.

Sea f la función lineal sobre los intervalos $[\frac{m_{j-1}}{m}, r_j]$ y $[r_j, \frac{m_j}{m}]$, por la definición de $f(r_j)$ tenemos que f no es constante en los subintervalos $[\frac{m_{j-1}}{m}, r_j]$ y $[r_j, \frac{m_j}{m}]$. Notemos lo siguiente

Si $h_j > \frac{2}{n\delta}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\frac{i_j}{n} - (\frac{i_j-1}{n})}{r_j - \frac{m_{j-1}}{m}}\right| &= \left|\frac{\frac{i_j}{n} - (\frac{i_j-1}{n})}{r_j - \frac{m_j}{m}}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{m_j-m_{j-1}}{2m}}\right| \\
&= \frac{2m}{n(m_j - m_{j-1})} \\
&= \frac{2m}{nh_j} \\
&< m\delta
\end{aligned}$$

Si $h_j \leq \frac{2}{n\delta}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\frac{i_j-1}{n} + \frac{h_j\delta}{2} - (\frac{i_j-1}{n})}{r_j - \frac{m_{j-1}}{m}}\right| &= \left|\frac{\frac{i_j-1}{n} + \frac{h_j\delta}{2} - (\frac{i_j-1}{n})}{r_j - \frac{m_j}{m}}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{i_j}{n} + \frac{h_j\delta}{2} - (\frac{i_j}{n})}{r_j - \frac{m_{j-1}}{m}}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{i_j}{n} + \frac{h_j\delta}{2} - (\frac{i_j}{n})}{r_j - \frac{m_j}{m}}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{h_j\delta}{2}}{\frac{m_j-m_{j-1}}{2m}}\right| \\
&= \frac{mh_j\delta}{h_j} \\
&= m\delta.
\end{aligned}$$

Por lo que el valor de la pendiente de cada una de las dos semirectas de f en el intervalo $[\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{m_j}{m}]$ es menor o igual que $m\delta$. Así, si $s, t \in [\frac{m_{j-1}}{m}, \frac{m_j}{m}]$ y $|s-t| < \frac{1}{m}$, entonces

$$|f(s) - f(t)| = |\delta(s-t)| \leq m\delta|s-t| < \delta.$$

Además de la linealidad de f, si $m_{j-1} < l \leq m_j$, entonces

$$f\left(\left[\frac{l-1}{m}, \frac{l}{m}\right]\right) \subseteq \left[\frac{i_j-1}{n}, \frac{i_j}{n}\right].$$

Y si D_l es un eslabón en la subcadena $\mathcal{B}_j$ entonces $\mathrm{Cl}(D_l) \subseteq C_{i_j}$.

Caso iii) Extensión de f a $[0, \frac{m_1}{m}]$.

Supongamos que $i_1 < i_2$. Si $h_1 > \frac{2}{n\delta}$, hacemos

$$f(0) = \frac{i_1-1}{n}.$$

Luego $f(0) < f(\frac{m_1}{m}) = \frac{i_1}{n}$.
Si $h_i \leq \frac{2}{n\delta}$, hacemos

$$f(0) = \frac{i_1}{n} - \frac{h_1\delta}{2},$$

por lo cual $f(0) \geq \frac{i_1-1}{n}$ y $f(0)$ es distinto de $\frac{i_1}{n}$.
Supongamos que $i_1 > i_2$. Si $h_1 > \frac{2}{n\delta}$ hacemos

$$f(0) = \frac{i_1}{n}.$$

Si $h_1 \leq \frac{2}{n\delta}$ definamos

$$f(0) = \frac{i_1-1}{n} + \frac{h_1\delta}{2},$$

por lo cual $f(0) \leq \frac{i_1}{n}$ y $f(0)$ es distinto de $\frac{i_j-1}{n}$.

Sea f la función lineal sobre el intervalo $[0, \frac{m_1}{m}]$, notemos que el valor absoluto de la pendiente de f en el intervalo $[0, \frac{m_1}{m}]$ es menor que $\frac{m\delta}{2}$. Así, si $s, t \in [0, \frac{m_1}{m}]$ y $|s-t| \leq \frac{1}{m}$ entonces $|f(s)-f(t)| < \frac{\delta}{2}$. Más aún, si $1 \leq 1 \leq m_1$, entonces $f([\frac{l-1}{m}, \frac{l}{m}]) \subseteq [\frac{i_1-1}{n}, \frac{i_1}{n}]$ y $\mathrm{Cl}(D_l) \subseteq C_{i_j}$.

Caso iv) Extensión de f a $\left[\frac{m_{k-1}}{m}, 1\right]$.

Supongamos que $i_{k-1} < i_k$ entonces $f(\frac{m_{k-1}}{m}) = \frac{i_{k-1}}{n}$.
Si $h_k > \frac{2}{n\delta}$, hacemos

$$f(1) = \frac{i_{k-1}+1}{n} = \frac{i_k}{n}.$$

Si $h_k \leq \frac{2}{n\delta}$, hacemos

$$f(1)=\tfrac{i_{k-1}}{n}+\tfrac{h_k\delta}{2}.$$

Así, $f(1)\leq \frac{i_k}{n}$.
Supongamos que $i_{k-1}>i_k$. Por definición

$$f\left(\tfrac{m_{k-1}}{m}\right)=\tfrac{i_{k-1}-1}{n} \text{ y } i_{k-1}-1=i_k.$$

Si $h_k>\frac{2}{n\delta}$, hacemos

$$f(1)=\tfrac{i_k-1}{n},$$

así $f(1)\neq \frac{i_k}{n}$.

Si $h_k\leq \frac{2}{n\delta}$, hacemos

$$f(1)=\tfrac{i_k}{n}-\tfrac{h_k\delta}{2},$$

por ello $f(1)\geq \frac{i_k-1}{n}$.

Sea f la función lineal sobre $[\frac{m_{k-1}}{m},1]$ que une a los puntos $(\frac{m_{k-1}}{m},f(\frac{m_{k-1}}{m}))$ y $(1,f(1))$. Notemos lo siguiente:

Si $h_k>\frac{2}{n\delta}$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{\frac{i_{k-1}+1}{n}-\frac{i_k-1}{n}}{1-\frac{m_{k-1}}{m}}\right| &= \left|\frac{\frac{i_k-1}{n}-\frac{i_k}{n}}{1-\frac{m_{k-1}}{m}}\right|\\ &=\frac{m}{n(m-m_{k-1})}\\ &=\frac{m}{nh_k}\\ &<\frac{m\delta}{2}.\end{aligned}$$

Si $h_k\leq \frac{2}{n\delta}$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\frac{\frac{i_{k-1}}{n}+\frac{h_k\delta}{2}-\frac{i_{k-1}}{n}}{1-\frac{m_{k-1}}{m}}\right| &= \left|\frac{\frac{i_k}{n}-\frac{h_k\delta}{2}-\frac{i_k}{n}}{1-\frac{m_{k-1}}{m}}\right|\\ &\leq\frac{mh_k\delta}{2(m-m_{k-1})}\\ &=\frac{m\delta}{2}.\end{aligned}$$

Por lo que el valor de la pendiente en $[\frac{m_{k-1}}{m}, 1]$ es menor o igual que $\frac{m\delta}{2}$. Así, si s y t están en $[\frac{m_{k-1}}{m}, 1]$ y si $|s-t| < \frac{1}{m}$, entonces $|f(s) - f(t)| < \frac{\delta}{2} < \delta$. Además, si $m_{k-1} < l \leq m_k$, entonces $f([\frac{l-1}{m}, \frac{l}{m}]) \subseteq [\frac{i_k-1}{n}, \frac{i_k}{n}]$ y $\mathrm{Cl}(D_l) \subseteq C_{i_k}$.

Esto completa la definición de f. La construcción nos asegura que f es una función lineal por partes y no es constante en ningún subintervalo de $[0,1]$. Por la definición de f las condiciones 1), 2) y 4) se satisfacen, falta probar que la condición 3) se cumple y que f es una función sobreyectiva.

La función f es sobreyectiva.
Los puntos p y q los usamos para asegurar que existen puntos a, b tales que $f(a) = 0$ y $f(b) = 1$.

Note que $p \in \mathcal{B}_j^*$ para algún j. Como C_1 es el único eslabón que contiene al punto p, $i_j = 1$. Ya que $d(p, \mathrm{Cl}(C_i)) > \sigma$ para $i \neq 1$ se tiene que $h_j > \frac{2}{n\delta}$. Analicemos varios casos para j:
Si $j = 1$, entonces $i_1 < i_2$. Por lo que por definición de f, $f(0) = \frac{i_1 - 1}{n}$ y como $i_1 = 1$ se tiene que $f(0) = 0$.
Si $j = k$ tenemos que $i_k = 1$. Por lo que $i_{k-1} = 2$, así,

$$f\left(\frac{m_{k-1}}{m}\right) = \frac{1}{n} \text{ y } f(1) = \frac{i_k - 1}{n} = 0.$$

Si $1 < j < k$ entonces $i_{j-1} = i_{j+1} = 2$, así

$$f\left(\frac{m_{j-1}}{m}\right) = \frac{i_{j-1} - 1}{n} = \frac{1}{n} = f(\frac{m_j}{m}),$$

como $h_j > \frac{2}{n\delta}$ por definición $f(r_j) = \frac{i_j - 1}{n} = 0$.

Resumiendo, si $j = 1$ hacemos $a = 0$, si $j = k$ hacemos $a = 1$ y si $1 < j < k$ hacemos $a = r_j$.

Análogamente, existe j tal que $q \in \mathcal{B}_j^*$, por lo que $i_j = n$. Como $d(q, \mathrm{Cl}(C_i)) > \sigma$ para $i \neq n$ se tiene que $h_j > \frac{2}{n\delta}$. Analicemos los posibles casos para j:
Si $j = 1$ entonces $i_1 = n$, así $i_1 > i_2$, por definición de f,

$$f(0) = \frac{i_1}{n} = 1.$$

Si $j = k$ entonces $i_k = n$, por lo que $i_{k-1} < i_k$, así por definición de f,

$$f(1) = \frac{i_k}{n} = 1.$$

Si $1 < j < k$, entonces $i_{j-1} = i_{j+1} = n-1$. Por tanto, $i_j > i_{j-1}$ y $i_j > i_{j+1}$, lo que implica que

$$f\left(\tfrac{m_{j-1}}{m}\right) = \tfrac{i_j-1}{n} = \tfrac{n-1}{n} \text{ y } f\left(\tfrac{m_j}{m}\right) = \tfrac{i_j-1}{n} = \tfrac{n-1}{n},$$

por lo cual existe r_j tal que $f(r_j) = \frac{i_j}{n} = 1$.

Por lo tanto, si $j = 1$ hacemos $b = 0$, si $j = k$ hacemos $b = 1$ y si $1 < j < k$ hacemos $b = r_j$.

Notemos que $a \neq b$ y supongamos que $a < b$ puesto que $f(a) = 0, f(b) = 1$ y de la continuidad de f tenemos que $f([a,b]) = I$.

Finalmente demostraremos que la condición 3) se satisface.

Si $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, $\mathrm{Cl}(D_j) \subseteq C_i$ y l es un entero positivo tal que $D_l \cap D_j \neq \emptyset$, entonces $f([\frac{l-1}{m}, \frac{l}{m}]) \subseteq [\frac{i-2}{n}, \frac{i+1}{n}]$.

Supongamos que $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, $\mathrm{Cl}(D_j) \subseteq C_i$ y l es un entero tal que $D_l \cap D_j$. Para D_l existe un entero g, $1 \leq g \leq k$ tal que D_l pertenece a $\mathcal{B}_g$ y existe un entero i_g, $1 \leq i_g \leq n$ tal que $\mathrm{Cl}(\mathcal{B}^*) \subseteq C_{i_g}$, como $\mathrm{Cl}(D_l) \subseteq C_{i_g}$ se tiene que $C_{i_g} \cap C_i \neq \emptyset$ por lo que $|i_g - i| \leq 1$, por la definición de f tenemos que

$$f\left(\left[\tfrac{l-1}{m}, \tfrac{l}{m}\right]\right) \subseteq \left[\tfrac{i_g-1}{n}, \tfrac{i_g}{n}\right],$$

pero

$$\left[\tfrac{i_g-1}{n}, \tfrac{i_g}{n}\right] \subseteq \left[\tfrac{i-2}{n}, \tfrac{i+1}{n}\right].$$

Por lo tanto

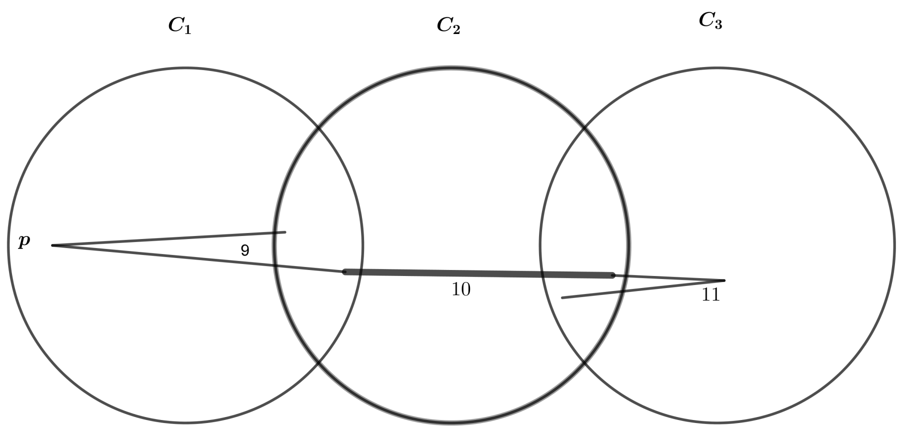
$$f\left(\left[\tfrac{l-1}{m}, \tfrac{l}{m}\right]\right) \subseteq \left[\tfrac{i-2}{n}, \tfrac{i+1}{n}\right].$$

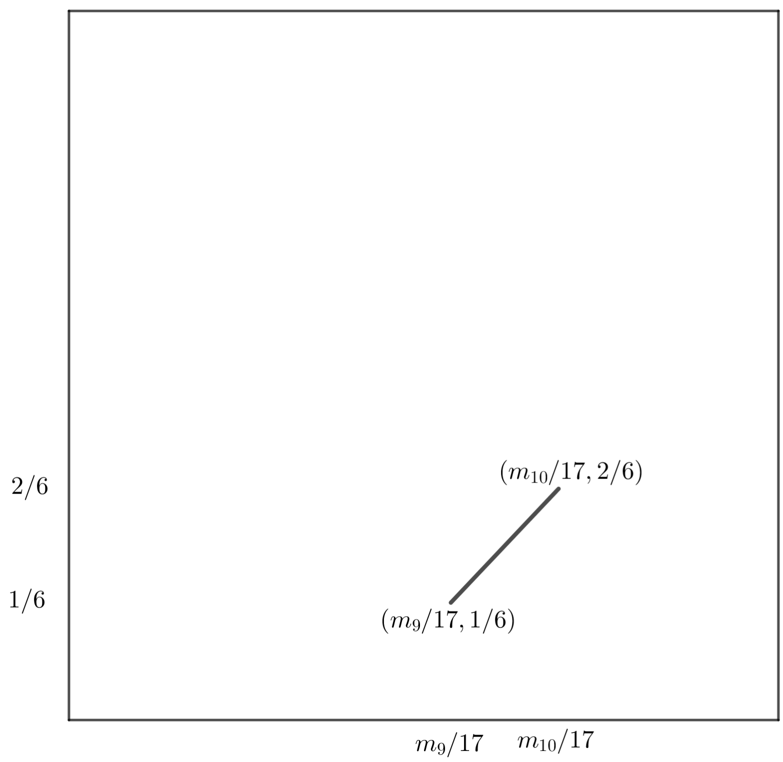
□

Cuadro 3.1: Algunos valores de la función f de acuerdo al comportamiento de la cadena $\mathcal{D}$ dentro de la cadena $\mathcal{C}$ en la Figura 3.1

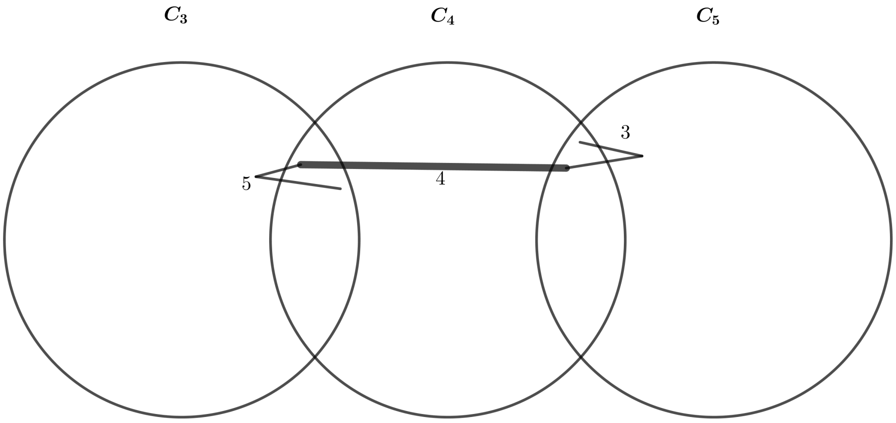
Comportamiento de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{C}$ y la extensión de f

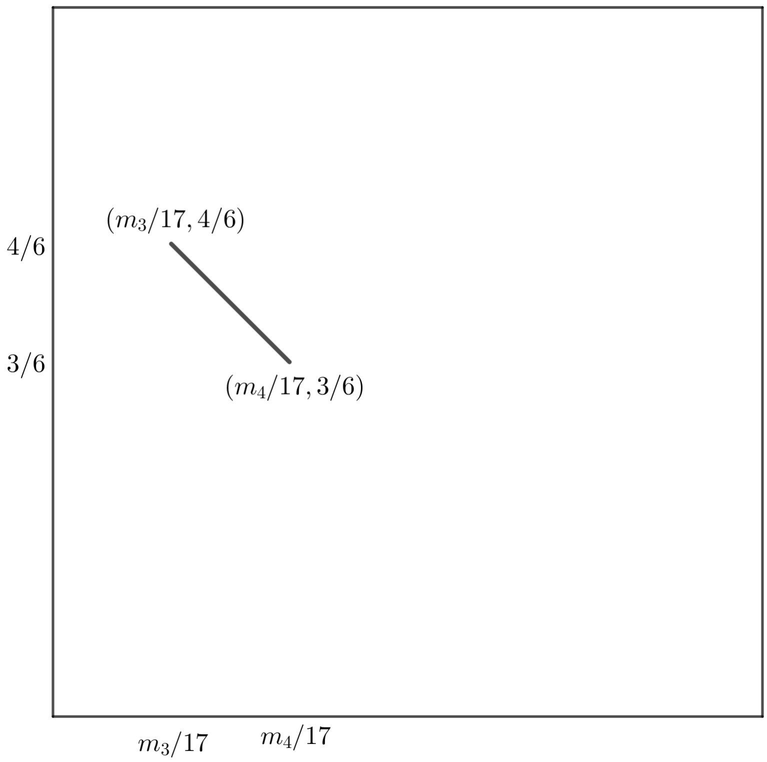
Comportamiento de las subcadenas $\mathcal{B}_9, \mathcal{B}_{10}$ y $\mathcal{B}_{11}$



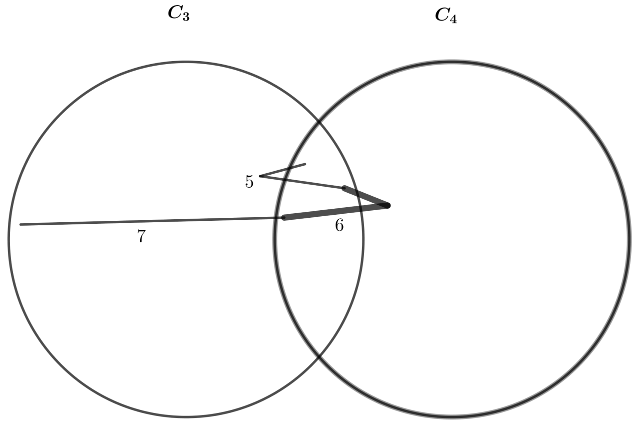


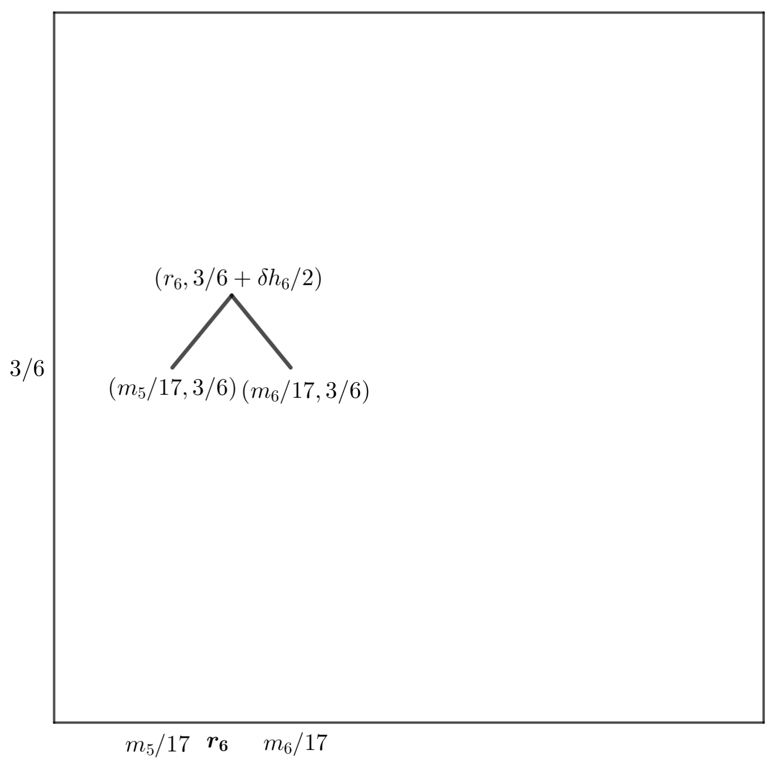
Comportamiento de las subcadenas $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4$ y $\mathcal{B}_5$



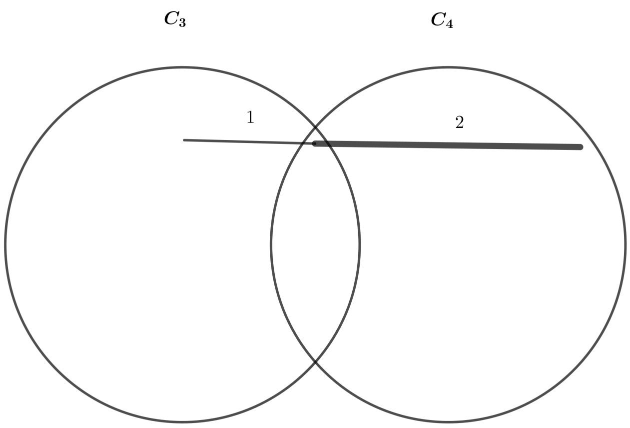


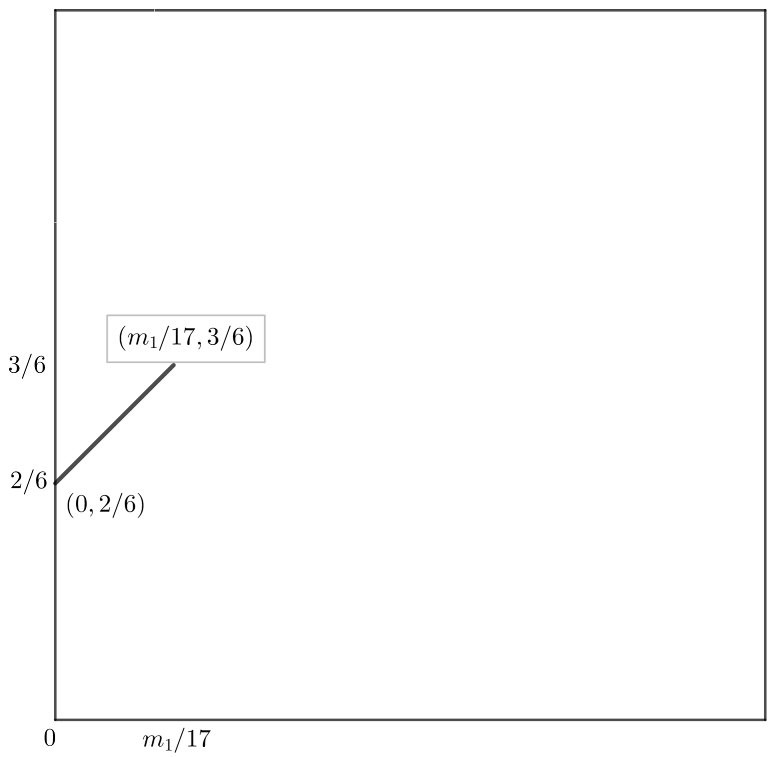
Comportamiento de las subcadenas $\mathcal{B}_5, \mathcal{B}_6$ y $\mathcal{B}_7$.



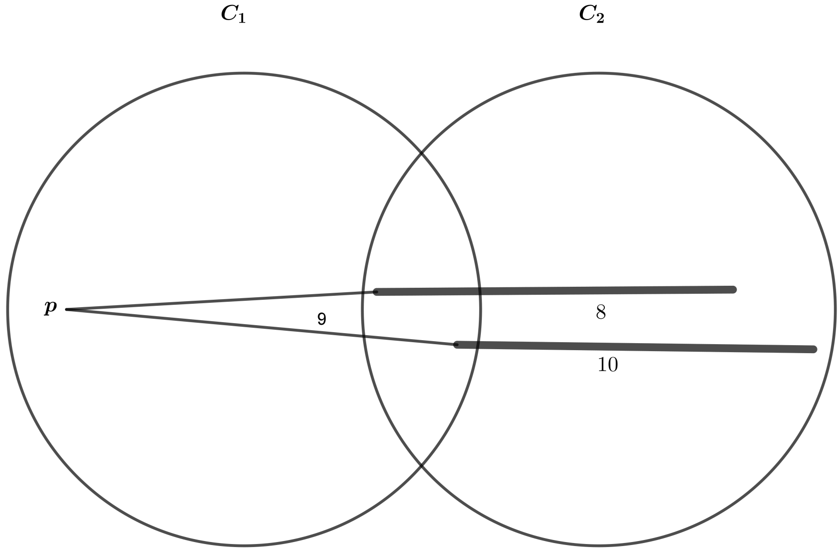


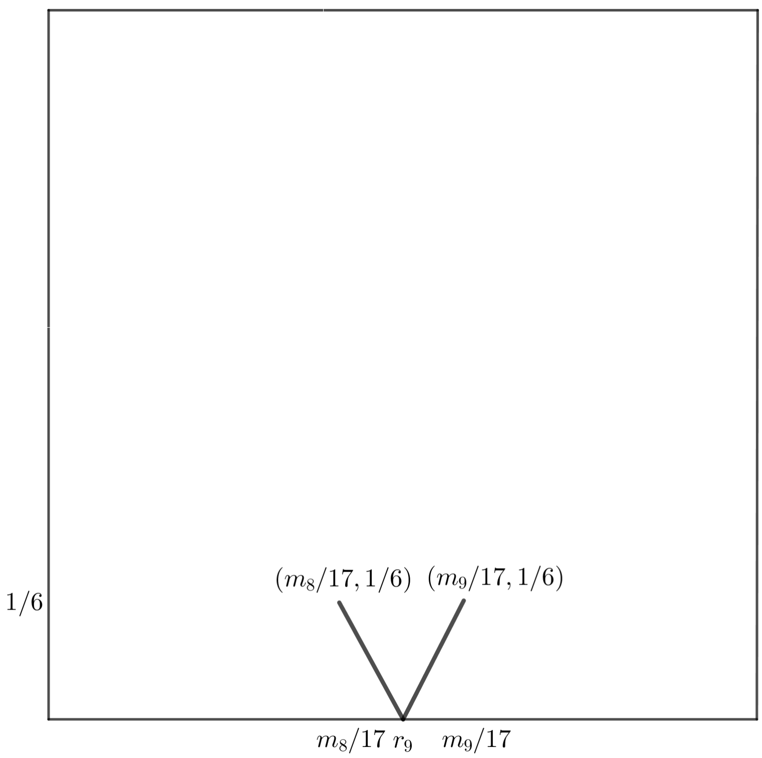
Comportamiento de las subcadenas $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$
con $h_1 > \frac{2}{6\delta}$.



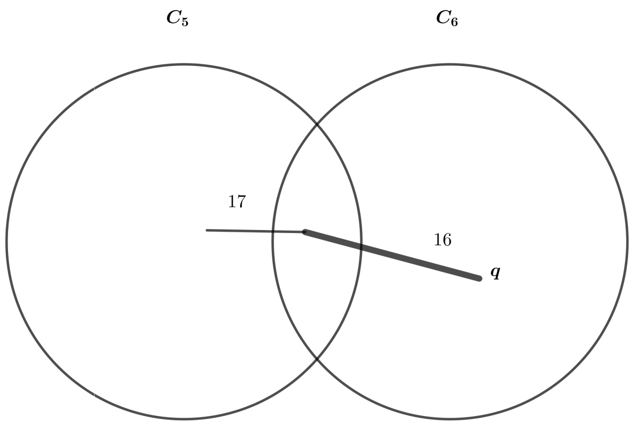


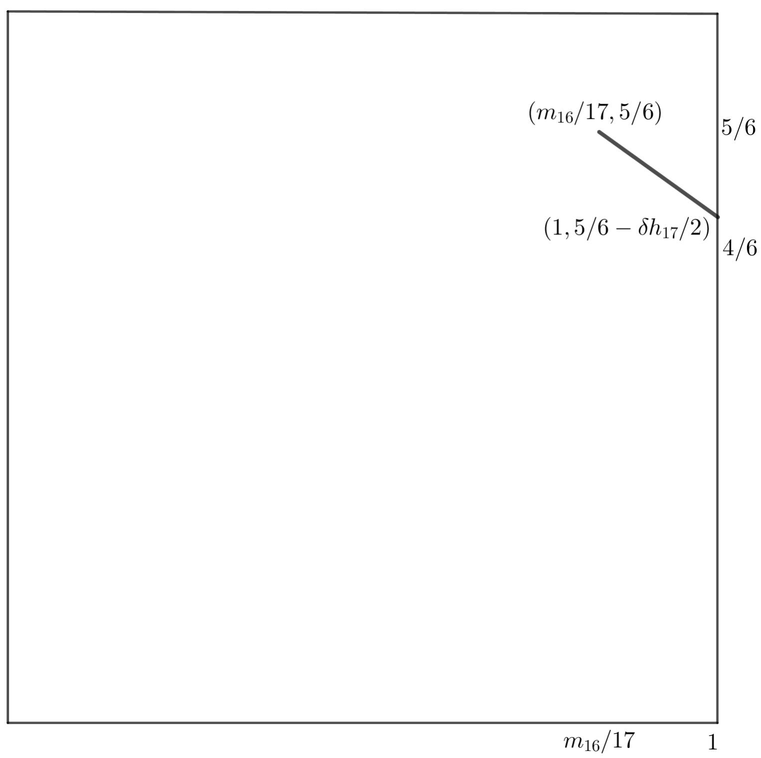
Comportamiento de las subcadenas $\mathcal{B}_8, \mathcal{B}_9$ y $\mathcal{B}_{10}$





Comportamiento de las subcadenas $\mathcal{B}_{16}$ y $\mathcal{B}_{17}$
con $h_{17} \leq \frac{2}{6\delta}$.





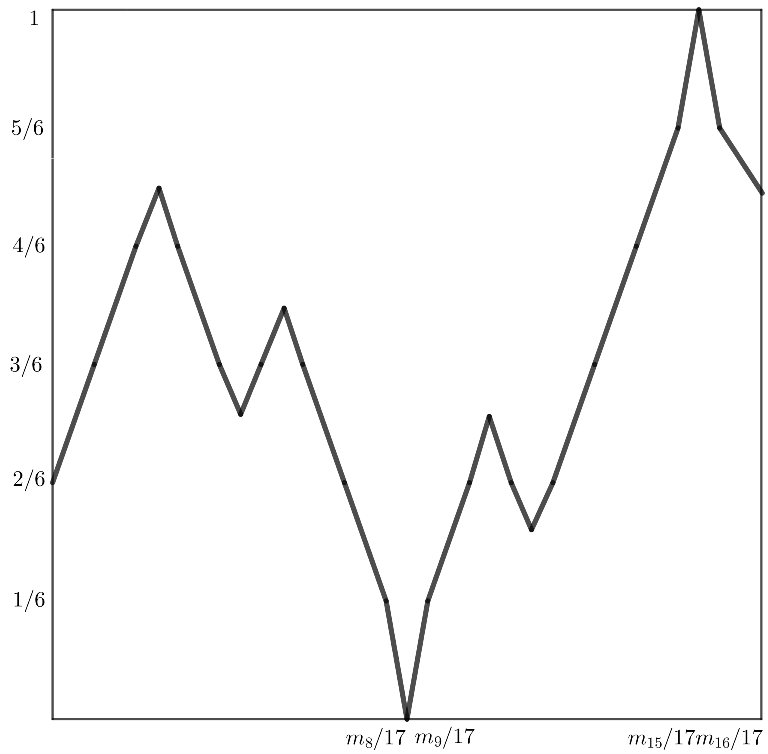


Figura 3.2: Función basada en las cadenas descritas en la figura 3.1. Por consiguiente $n = 6$ y $k = 17$.

En la prueba del Teorema 3.4 usaremos el siguiente teorema, cuya demostración puede encontrarse en [3, Teorema 114, pág 47].

Teorema 3.3 *Si Q es una propiedad y para cada entero positivo n, H_n es un conjunto finito y cada elemento de H_{n+1} tiene la propiedad Q con respecto de algún elemento de H_n, entonces existe una sucesión $J_1, J_2, \ldots$ tal que para cada n, $J_n \in H_n$ y J_{n+1} tiene la propiedad Q con respecto a J_n.*

Definición 3.4 *Una sucesión $\boldsymbol{\delta}$ de enteros positivos es una sucesión de Lebesgue para una sucesión de límite inverso $\boldsymbol{f}$ siempre que para cualesquiera i y j con $i < j$. Si $x, y \in X_j$ y $d_{X_j}(x, y) < \delta_j$ entonces $d_{X_i}(f_{ij}(x), f_{ij}(y)) < \frac{1}{2^j}$.*

Teorema 3.4 *Si M es un continuo encadenable no degenerado, entonces existe una sucesión de límite inverso $\boldsymbol{f}$ de funciones lineales por partes sobreyectivas sobre $[0, 1]$, tal que M es homeomorfo a $\varprojlim \boldsymbol{f}$ y ninguna función de la sucesión $\boldsymbol{f}$ es constante en algún subintervalo de $[0, 1]$.*

Demostración.
La prueba es dividida en varias partes: la construcción de la sucesión de límite inverso, la definición del homeomorfismo h y la prueba de que h es continua, inyectiva y sobreyectiva.

Construcción de la sucesión de límite inverso.
Sea $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$ una sucesión definitiva de cadenas para M obtenidas del Teorema 3.2 con $\mathcal{C}_n = (C_1^n, C_2^n, \ldots, C_{m_n}^n)$ para cada n. Sean $p_1 \in M \cap C_1^1$ tal que $p_1 \notin \mathrm{Cl}(C_i^1)$ para $i \neq 1$, y $q_1 \in M \cap C_{m_1}^1$ tal que $q_1 \notin \mathrm{Cl}(C_i^1)$ para $i \neq m_1$ y σ_1 tal que $d(p_1, \mathrm{Cl}(C_i^1)) > \sigma_1$ si $i \neq 1$, $d(q_1, \mathrm{Cl}(C_i^1)) > \sigma_1$ si $i \neq m_1$ y $d(\mathrm{Cl}(C_i^1), \mathrm{Cl}(C_j^1)) > \sigma_1$ para $|i-j| > 1$. Sea $\delta_1 = \frac{1}{2}$. Ya que $\frac{m_1\sigma_1\delta_1}{2} > 0$, existe un entero $n_2 > 1$ tal que $\frac{1}{n_2} < \frac{m_1\sigma_1\delta_1}{2}$, por el Teorema 3.2 la malla de $\mathcal{C}_{n_2}$ es menor que $\frac{m_1\sigma_1\delta_1}{2}$. Por conveniencia supongamos que $n_2 = 2$. Usando $\delta_1 = \delta$, $\sigma_1 = \sigma$, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_2 = D$, $p_1 = p$ y $q_1 = q$ en el Lema 3.3 obtenemos una función lineal por partes $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ que satisface las condiciones del Lema 3.3.

Al ser f_1 continua en un espacio compacto, f_1 es uniformemente continua, así para $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ existe un número positivo δ_2 tal que si $|s-t| < \delta_2$ entonces $|f_1(s) - f_1(t)| < \frac{1}{2^2}$.

Elijamos $p_2 \in M \cap C_1^2$ y $q_2 \in M \cap C_{m_2}^2$ tales que $p_2 \notin \mathrm{Cl}(C_i^2)$ para $i \neq 1$ y $q_2 \notin \mathrm{Cl}(C_i^2)$ para $i \neq m_2$. Al igual que en la cadena $\mathcal{C}_1$ existe $\sigma_2 > 0$ tal que $d(p_2, \mathrm{Cl}(C_i^2)) > \sigma_2$ para $i \neq 1$, $d(q_2, \mathrm{Cl}(C_i^2)) > \sigma_2$ para $i \neq m_2$ y $d(\mathrm{Cl}(C_i^2), \mathrm{Cl}(C_j^2)) > \sigma_2$ para $|i-j| > 1$. Entonces, existe un entero positivo $n_3 > 2$ tal que la malla de $\mathcal{C}_{n_3}$ es menor que $\frac{m_2\sigma_2\delta_2}{2}$. Por lo que $\mathcal{C}_{n_3}$ refina fuertemente a $\mathcal{C}_2$. Por conveniencia asumamos que $n_3 = 3$ y usando a $\delta_2, \sigma_2, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, p_2$ y q_2 en el Lema 3.3 tenemos que existe una función continua lineal por partes $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ que satisface las conclusiones del Lema 3.3.

Dado que $f_{2\,3} = f_2$, y $f_{1\,3} = f_1 \circ f_2$ son uniformemente continuas, para $\varepsilon = \frac{1}{2^3}$, existe $\delta_3 > 0$ tal que si $|s-t| < \delta_3$ entonces $|f_{i\,j}(s) - f_{i\,j}(t)| < \frac{1}{2^3}$ para $j = 3$ y $1 \leq i < j$.

Supongamos que existe una función $f_{k-1} : [0,1] \to [0,1]$ continua lineal por partes tal que para $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ existe un número positivo δ_k tal que si $|s,t| < \delta_k$ entonces $|f_{i\,j}(s) - f_{i\,j}(t)| < \frac{1}{2^k}$ para $j = k$ y $1 \leq i < j$. Si $p_k \in M \cap C_1^k$ y $q \in C_{m_k}^k$ son tales que $p_k \notin \mathrm{Cl}(C_i^k)$ para $i > 1$ y $q_k \notin \mathrm{Cl}(C_i^k)$ para $i < m_k$, entonces existe un número positivo σ_k tal que $d(p_k, \mathrm{Cl}(C_i^k)) > \sigma_k$ para $i > 1$, $d(q_2, \mathrm{Cl}(C_i^k)) > \sigma_k$ para $i < m_k$ y $d(\mathrm{Cl}(C_i^k), \mathrm{Cl}(C_j^k)) > \sigma_k$ para $|i-j| > 1$. Entonces, existe un entero positivo n_{k+1} tal que $\frac{1}{n_{k+1}} < \frac{\sigma_k \delta_k m_k}{2}$ y la cadena $\mathcal{C}n_{k+1}$ refina fuertemente a $\mathcal{C}_k$ y cuya malla es menor que $\frac{\sigma_k \delta_k m_k}{2}$. Por conveniencia asumamos que $n_{k+1} = k+1$. Usando a δ_k, σ_k, $\mathcal{C}_k$, $\mathcal{C}_{k+1}$, p_k, y q_k en el Lema 3.3 obtenemos una función continua $f_k : [0,1] \to [0,1]$ lineal por partes que satisface las condiciones del Lema 3.3.

Notemos que $f_{1,n+1} = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ es una función uniformemente continua por lo que para $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$ existe δ_{k+1} tal que si $|s-t| < \delta_{k+1}$ entonces $|f_{i\,j}(s) - f_{i\,j}(t)| < \frac{1}{2^{k+1}}$ para $j = k+1$ y $1 \leq i < j$.

Por lo anterior existe una sucesión $\boldsymbol{f}$ de funciones de continuas, lineales por partes, sobreyectivas de $[0,1]$ a $[0,1]$ y una sucesión de Lebesgue $\boldsymbol{\delta} = \delta_1, \delta_2, \ldots$ para $\boldsymbol{f}$ tal que para cada entero positivo n satisface las siguientes condiciones:

1) Si $1 \leq j \leq m_{n+1}$, hay un entero positivo i, $1 \leq i \leq m_n$, tal que $f_n\left(\left[\frac{j-1}{m_{n+1}}, \frac{j}{m_{n+1}}\right]\right) \subseteq \left[\frac{i-1}{m_n}, \frac{i}{m_n}\right]$.

2) Si $1 \leq j < m_{n+1}, 1 \leq i \leq m_n$ y $f_n\left(\left[\frac{j-1}{m_{n+1}}, \frac{j}{m_{n+1}}\right]\right) \subseteq \left[\frac{i-1}{m_n}, \frac{i}{m_n}\right]$ entonces $\mathrm{Cl}(C_j^{n+1}) \subseteq C_i^n$.

3) Si $1 \leq j \leq m_{n+1}$, $1 \leq i \leq m_n$, $\mathrm{Cl}(C_j^{n+1}) \subseteq C_i^n$ y l es un entero positivo tal que $C_l^{m+1} \cap C_j^{n+1} \neq \emptyset$ entonces $f_n\left(\left[\frac{l-1}{m_{n+1}}, \frac{l}{m_{n+1}}\right]\right) \subseteq \left[\frac{i-2}{m_n}, \frac{i+1}{m_n}\right]$.

4) Si $1 \leq j \leq m_{n+1}$ y s, t son puntos de $\left[\frac{j-1}{m_{n+1}}, \frac{j}{m_{n+1}}\right]$ entonces $|f_n(s) - f_n(t)| < \delta_n$.

5) Para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n no es constante en ningún subintervalo de $[0,1]$.

Definición de h.
Sea $x \in M$, al ser $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$ una sucesión definitoria de cadenas, existe una sucesión $C_{i_1}^1, C_{i_2}^2, \ldots$ de eslabones tales que

$$C_{i_n}^n \in \mathcal{C}_n,\ \mathrm{Cl}(C_{i_{n+1}}^{n+1}) \subseteq C_{i_n}^n \text{ y } \{x\} = \bigcap_{n>0} C_{i_n}^n \qquad (*)$$

Ya que $C_{i_{n+1}}^{n+1} \cap C_l^{n+1} \neq \emptyset$, si $|i_{n+1} - l| \leq 1$, entonces de la condición 3) tenemos que

$$f_n\left(\left[\frac{i_{n+1}-2}{m_{n+1}}, \frac{i_{n+1}+1}{m_{n+1}}\right]\right) \subseteq \left[\frac{i_n-2}{m_n}, \frac{i_n+1}{m_n}\right].$$

Si $\boldsymbol{x} \in \pi_{n+1}^{-1}([\frac{i_{n+1}-2}{m_{n+1}}, \frac{i_{n+1}+1}{m_{n+1}}])$, entonces $x_{n+1} \in [\frac{i_{n+1}-2}{m_{n+1}}, \frac{i_{n+1}+1}{m_{n+1}}]$, por lo que

$$f_n(x_{n+1}) = x_n \in f_n\left(\left[\frac{i_{n+1}-2}{m_{n+1}}, \frac{i_{n+1}+1}{m_{n+1}}\right]\right) \subseteq \left[\frac{i_n-2}{m_n}, \frac{i_n+1}{m_n}\right],$$

en consecuencia $\boldsymbol{x} \in \pi_n^{-1}([\frac{i_n-2}{m_n}, \frac{i_n+1}{m_n}])$. Por lo tanto

$$\pi_{n+1}^{-1}\left(\left[\frac{i_{n+1}-2}{m_{n+1}}, \frac{i_{n+1}+1}{m_{n+1}}\right]\right) \subseteq \pi_n^{-1}\left(\left[\frac{i_n-2}{m_n}, \frac{i_n+1}{m_n}\right]\right).$$

Sea l tal que $1 \leq l \leq m_n$, si $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \pi_n^{-1}([\frac{l-1}{m_n}, \frac{l}{m_n}])$, entonces por la condición 4) tenemos que $|f_{n-1}(z_n) - f_{n-1}(y_n)| < \delta_{n-1}$. Al ser $\boldsymbol{\delta}$ una sucesión de Lebesgue para $\boldsymbol{f}$ tenemos que $|f_{1\,n-1}(z_{n-1}) - f_{1\,n-1}(y_{n-1})| < \frac{1}{2^{n-1}}$, y así

$$\begin{aligned}
d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= \sum_{i>0} \frac{|y_i - z_i|}{2^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} \frac{|y_i - z_i|}{2^i} + \frac{|f_{n-1}(z_n) - f_{n-1}(y_n)|}{2^{n-1}} + \sum_{i>n-1} \frac{|y_i - z_i|}{2^i} \\
&< \sum_{i=1}^{n-2} \frac{|f_{i\,n-1}(y_{n-1}) - f_{i\,n-1}(z_{n-1})|}{2^i} + \frac{\delta_{n-1}}{2^{n-1}} + \sum_{i>n-1} \frac{|y_i - z_i|}{2^i} \\
&< \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) + \frac{2}{2^{n-1}} \\
&< \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^n} + \frac{4}{2^n}.
\end{aligned}$$

Entonces, la colección $\{\pi_i^{-1}([\frac{i_n-2}{m_n}, \frac{i_n+1}{m_n}]) \mid i \in \mathbb{N}\}$ es una colección anidada de espacios compactos tales que el diámetro de cada $\pi_n^{-1}([\frac{i_n-2}{m_n}, \frac{i_n+1}{m_n}])$ es menor a $\frac{6}{2^n}$. Por lo tanto existe un único punto en la intersección

$$\bigcap_{n>0} \pi_n^{-1}\left(\left[\frac{i_n-2}{m_n}, \frac{i_n+1}{m_n}\right]\right).$$

Sea $h(x)$ este punto.

Ahora veamos que la elección de $h(x)$ es independiente de la elección de eslabones$C_{i_1}^1, C_{i_2}^2, \ldots$ que satisfacen $(*)$. Supongamos que $C_{i_1}^1, C_{i_2}^2, \ldots$, $C_{k_1}^1, C_{k_2}^2, \ldots$ satisfacen $(*)$ y que existe un entero positivo n tal que

$$\pi_n^{-1}([\tfrac{k-2}{m_n}, \tfrac{k+1}{m_n}]) \cap \pi_n^{-1}([\tfrac{i_n-2}{m_n}, \tfrac{i_n+1}{m_n}]) = \emptyset.$$

De la condición 3) tenemos que:

$$f_n\left(\left[\tfrac{i_{n+1}-2}{m_{n+1}}, \tfrac{i_{n+1}+1}{m_{n+1}}\right]\right) \subseteq \left[\tfrac{i_n-2}{m_n}, \tfrac{i_n+1}{m_n}\right],$$
$$f_n\left(\left[\tfrac{k_{n+1}-2}{m_{n+1}}, \tfrac{k_{n+1}+1}{m_{n+1}}\right]\right) \subseteq \left[\tfrac{k_n-2}{m_n}, \tfrac{k_n+1}{m_n}\right].$$

Como $x \in C^{n+1}_{i_{n+1}} \cap C^{n+1}_{k_{n+1}}$, se tiene que $|i_{n+1} - k_{n+1}| \leq 1$. Así que por definición de f los intervalos

$$\left[\tfrac{k_{n+1}-1}{m_{n+1}}, \tfrac{k_{n+1}}{m_{n+1}}\right] \text{ y } \left[\tfrac{i_{n+1}-1}{m_{n+1}}, \tfrac{i_{n+1}}{m_{n+1}}\right]$$

tienen un punto en común. Ya que

$$\left[\tfrac{k_{n+1}-1}{m_{n+1}}, \tfrac{k_{n+1}}{m_{n+1}}\right] \subseteq \left[\tfrac{k_{n+1}-2}{m_{n+1}}, \tfrac{k_{n+1}+1}{m_{n+1}}\right] \text{ y } \left[\tfrac{i_{n+1}-1}{m_{n+1}}, \tfrac{i_{n+1}}{m_{n+1}}\right] \subseteq \left[\tfrac{i_{n+1}-2}{m_{n+1}}, \tfrac{i_{n+1}+1}{m_{n+1}}\right]$$

existe un punto s en $[\frac{i_n-2}{m_n}, \frac{i_n+1}{m_n}] \cap [\frac{k_n-2}{m_n}, \frac{k+1}{m_n}]$ y como las funciones de ligadura en la sucesión $\boldsymbol{f}$ son sobreyectivas existe un punto $\boldsymbol{p}$ tal que $\pi_n(\boldsymbol{p}) = s$, lo cual contradice el hecho de que

$$\pi_n^{-1}\left(\left[\tfrac{k-2}{m_n}, \tfrac{k+1}{m_n}\right]\right) \cap \pi_n^{-1}\left(\left[\tfrac{i_n-2}{m_n}, \tfrac{i_n+1}{m_n}\right]\right) = \emptyset.$$

Por lo tanto, para toda n, $\pi_n^{-1}([\frac{k-2}{m_n}, \frac{k+1}{m_n}])$ y $\pi_n^{-1}([\frac{i_n-2}{m_n}, \frac{i_n+1}{m_n}])$ se intersectan, lo cual demuestra que h está bien definida.

La función h es inyectiva.
Sean x, y puntos de M tales que $x \neq y$ y $C^1_{i_1}, C^2_{i_2}, \ldots$, $C^1_{j_1}, C^2_{j_2}, \ldots$ sucesiones de eslabones tales que para cada n satisfacen $(*)$, es decir

$$C^n_{i_n}, C^n_{j_n} \in \mathcal{C}_n,\ \mathrm{Cl}(C^{n+1}_{i_{n+1}}) \subseteq C^n_{i_n},\ \mathrm{Cl}(C^{n+1}_{j_{n+1}}) \subseteq C^n_{j_n}$$
$$\text{y } \{x\} = \bigcap_{n>0} C^n_{i_n},\ \{y\} = \bigcap_{n>0} C^n_{j_n}.$$

Dado que $x \neq y$ existe n tal que $C^n_{i_n} \cap C^n_{j_n} = \emptyset$, al ser $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$ una sucesión de cadenas definitivas para M, elijamos $m > n$ tal que

$$\mathrm{Cl}(C^m_{i_m}), \mathrm{Cl}(C^m_{i_m-1}), \mathrm{Cl}(C^m_{i_m+1}) \subseteq C^n_{i_n} \text{ y } x \in C^m_{i_m}$$
$$\mathrm{Cl}(C^m_{j_m}), \mathrm{Cl}(C^m_{j_m-1}), \mathrm{Cl}(C^m_{j_m+1}) \subseteq C^n_{j_n} \text{ y } y \in C^m_{j_m}.$$

Por lo que

$$\left[\tfrac{i_m-2}{m_n}, \tfrac{i_m+1}{m_n}\right] \cap \left[\tfrac{j_m-2}{m_n}, \tfrac{j_m+1}{m_n}\right] = \emptyset,$$

también

$$h(x) \in \pi_m^{-1}\left(\left[\tfrac{i_m-2}{m_n}, \tfrac{i_m+1}{m_n}\right]\right) \text{ y } h(y) \in \pi_m^{-1}\left(\left[\tfrac{j_m-2}{m_n}, \tfrac{j_m+1}{m_n}\right]\right),$$

en consecuencia $h(x) \neq h(y)$.

La función h es sobreyectiva.
Sea $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots) \in \varprojlim \boldsymbol{f}$, usaremos el Teorema 3.3 para probar la sobreyectividad de h. Para cada entero positivo n, sea

$$H_n = \{J \mid J = \left[\tfrac{l-1}{m_n}, \tfrac{l}{m_n}\right] \text{ para algún } l, 1 \leq l \leq m_n \text{ y } y_n \in J\}.$$

Notemos que si $y_n = \frac{l-1}{m_n}$ entonces

$$J = \left[\tfrac{l-1}{m_n}, \tfrac{l}{m_n}\right] \text{ o } J = \left[\tfrac{l-2}{m_n}, \tfrac{l-1}{m_n}\right]$$

y que si $y_n = \frac{l}{m_n}$ entonces

$$J = \left[\tfrac{l-1}{m_n}, \tfrac{l}{m_n}\right] \text{ o } J = \left[\tfrac{l}{m_n}, \tfrac{l+1}{m_n}\right]$$

y si $y_n \in (\frac{l-1}{m_n}, \frac{l}{m_n})$, entonces

$$J = \left[\tfrac{l-1}{m_n}, \tfrac{l}{m_n}\right],$$

por lo que H_n contiene a lo más dos elementos. La propiedad Q del Teorema 3.3 es la condición 1) que satisface la sucesión $\boldsymbol{f}$, es decir, si K es un elemento de H_{n+1} entonces $y_{n+1} \in K$ y por la condición 1) existe un elemento J tal que $y_n \in J$ y $f_n(K) \subseteq J$. Entonces, por el Teorema 3.3, existe una sucesión $l_1, l_2, l_3, \ldots$ tal que $y_i \in [\frac{l_i-1}{m_i}, \frac{l_i}{m_i}]$ y

$$f_i\left(\left[\tfrac{l_{i+1}-1}{m_{i+1}}, \tfrac{l_{i+1}}{m_{i+1}}\right]\right) \subseteq \left[\tfrac{l_i-1}{m_i}, \tfrac{l_i}{m_i}\right]$$

para cada i. Por la condición 2), $\mathrm{Cl}(C^{i+1}_{l_{i+1}}) \subseteq C^i_{l_i}$ lo cual implica que existe $x \in M$ tal que $\{x\} = \bigcap_{n>0} C^n_{i_n}$ y

$$\bigcap_{n>0} \pi_n^{-1}\left(\left[\tfrac{l_n-1}{m_n}, \tfrac{l_n}{m_n}\right]\right) \subseteq \bigcap_{n>0} \pi_n^{-1}\left(\left[\tfrac{l_n-2}{m_n}, \tfrac{l_n+1}{m_n}\right]\right) = \{\boldsymbol{y}\},$$

por lo tanto $h(x) = \boldsymbol{y}$.

La función h es continua.
Sean $x \in M$ y $C^1_{i_1}, C^2_{i_2}, C^3_{i_3}, \ldots$ una sucesión de eslabones que contienen a x tales que $\mathrm{Cl}(C^{n+1}_{i_{n+1}}) \subseteq C^n_{i_n}$ para cada n y

$$\{h(x)\} = \bigcap_{n>0} \pi_n^{-1}\left(\left[\tfrac{i_n-2}{m_n}, \tfrac{i_n+1}{m_n}\right]\right).$$

Sea V un abierto básico que contiene a $h(x)$, entonces existe un entero positivo k tal que

$$\pi_k^{-1}\left(\left[\tfrac{i_k-3}{m_k}, \tfrac{i_k+2}{m_k}\right]\right) \subseteq V.$$

Si $y \in C_{i_k}^k$, entonces existe una sucesión de cadenas $C_{l_1}^1, C_{l_2}^2, \ldots$ que contienen a y, $\mathrm{Cl}(C_{l_{n+1}}^{n+1}) \subseteq C_{l_n}^n$ para cada n y

$$\{h(y)\} = \bigcap_{n>0} \pi_n^{-1}\left(\left[\tfrac{l-2}{m_n}, \tfrac{l+1}{m_n}\right]\right),$$

como $|l_k - i_k| \leq 1$, se tiene que

$$h(y) \in \pi_k^{-1}\left(\left[\tfrac{i_k-3}{m_k}, \tfrac{i_k+2}{m_k}\right]\right),$$

por lo que $h(y) \in V$. Por lo tanto h es una función continua.

Por lo anterior h es una función de M sobre $\varprojlim \boldsymbol{f}$ continua, biyectiva definida en el espacio métrico compacto M. Por lo tanto h es un homeomorfismo. $\square$

Bibliografía

[1] W. T. Ingram y W. S. Mahavier, *Inverse limits: From continua to Chaos*, Developments in Mathematics, Vol. 25, Springer, New York (2012).

[2] K. Kuratowski, *Topology*, Academic Press, Vol. 2, New York (1968).

[3] R. L. Moore, *Foundations of Point Set Theory*, Colloquium Publications, Vol. XIII, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1962.

[4] J. R. Munkres *Topología*, Segunda Edición, Pearson Educación S. A., Madrid (2002).